This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Sci 425.32.2

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

SCI 425.32.2

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

COMPTE RENDU

DU

DEUXIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL

DES MATHÉMATICIENS

TENU A PARIS DU 6 AU 12 AOUT 1900.

PROCÈS-VERBAUX ET COMMUNICATIONS

PUBLIÉS PAR

E. DUPORCQ,
Ingénieur des Télégraphes, Secrétaire général du Congrès.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

Digitized by Google

Sci 925.32.2

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY
31 1974

71 *1

Digitized by Google

COMPTE RENDU

DU

DEUXIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL

DES MATHÉMATICIENS

TENU A PARIS DU 6 AU 12 AOUT 1900.

PREMIÈRE PARTIE.

DOCUMENTS ET PROCÈS-VERBAUX.

BUREAU DU CONGRÈS.

Président d'honneur : MM.	HERMITE.
Président :	POINCARÉ.
Vice-Présidents :	CZUBER.
	GEISER.
	GORDAN.
	GREENHILL.
	LINDELÖF.
	LINDEMANN.
	MITTAG-LEFFLER.
	MOORE.
	TIKHOMANDRITZKY.
	VOLTERRA.
	ZEUTHEN.
Secrétaire général :	DUPORCQ.
Secrétaires :	BENDIXSON.
	CAPELLI.
	MINKOWSKI.
	PTASZYCKI.
	WHITEHEAD.

Digitized by Google

BUREAUX DES SECTIONS.

	Présidents.	*Secrétaires.*
Première section :	MM. Hilbert.	MM. Cartan.
Deuxième » :	Painlevé.	Hadamard.
Troisième » :	Darboux.	Niewenglowski.
Quatrième » :	Larmor.	Levi-Civita.
Cinquième » :	Prince R. Bonaparte.	D'Ocagne.
Sixième » :	M. Cantor.	Laisant.

DÉLÉGUÉS OFFICIELS.

Autriche : MM. Czuber, Finger.
Espagne : M. de Galdeano.
États-Unis : Miss Angas Scott, M. Moore.
France : MM. Tannery, délégué du Ministre de l'Instruction publique; Simonot, délégué du Ministre de la Marine.
Hongrie : M. Rados.
Japon : M. Fujisawa.
Mexique : M. Stampa.
Université de Californie : M. Stringham.
Faculté des Sciences de Buenos-Ayres : M. Gallardo.

Digitized by Google

LISTE GÉNÉRALE DES MEMBRES.

MM.

Ackermann-Teubner, éditeur, Poststrasse, 3, à Leipzig (Allemagne).

Alezais (**Raymond**), rue Sainte-Hélène, 10, à Lyon (Rhône).

Allardice (**R.-E.**), Stanford University, Californie (États-Unis).

Amici (**Nicolas**), professeur à l'Institut technique, à Macerata (Italie).

Amodeo (**F.**), via Scarlatti, 32, à Naples (Italie).

André (**Désiré**), docteur ès sciences mathématiques, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris.

Appell (**Paul**), membre de l'Institut, rue de Noailles, 23, à Saint-Germain-en-Laye (Seine-et-Oise).

Aron (**H.**), quai de Jemmapes, 200, à Paris.

Astor, professeur à la Faculté des Sciences, place Vaucanson, 4, à Grenoble (Isère).

Aubert (**P.**), professeur au collège Stanislas, rue de l'Orangerie, 2 *bis*, à Meudon (Seine-et-Oise).

Aubry (**A.**), à Ouzouet-sur-Loire (Loiret).

Autonne (**Léon**), ingénieur des ponts et chaussées, rue Mont-Bernard, 9, à Lyon (Rhône).

Baire (**R.**), professeur au lycée, 29, quai Victor-Hugo, à Bar-le-Duc (Meuse).

Barbette (**E.**), rue Hullos, 19, à Liége (Belgique).

Beaupain (**Jean**), rue Fabry, 68, à Liége (Belgique).

Bendixson (**Ivar**), professeur à l'École Polytechnique, Holländaregatan, 21, A, à Stockholm (Suède).

Beudon, décédé.

Bioche (**Ch.**), professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris.

Blutel, professeur au lycée Saint-Louis, maître de conférences à la Sorbonne, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris.

Boccardi (**Jean**), assistant à l'Observatoire royal astronomique de Catania, Sicile (Italie).

Bonaparte (prince **Roland**), avenue d'Iéna, 10, à Paris.

Borel (**Émile**), maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard Saint-Germain, 30, à Paris.

Boset, à Limerlé (Belgique).

Bourlet (**C.**), professeur à l'École des Beaux-Arts et au lycée Saint-Louis, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris.

Boutin (**Auguste**), rue Antoinette, 30, à Paris.

Brand (**Eugène**), rue de la Ruche, 51, à Bruxelles (Belgique).

Brocard (**G.**), rue Marie-Thérèse, 23, au Havre (Seine-Inférieure).

Brocard (**H.**), chef de bataillon du génie en retraite, rue des Ducs, 75, à Bar-le-Duc (Meuse).

Brown (**E.-W.**), Christ's College, à Cambridge (Angleterre).

Busche (**E.**), am Baum, 51, à Bergedorf bei Hamburg (Allemagne).

Digitized by Google

MM.

Cabreira (**Antonio**), membre de l'Académie royale des Sciences, rua da Alegria, 36, à Lisbonne (Portugal).

Cabreira (**Thomas**), professeur à l'École Polytechnique, rua da Alegria, 36, à Lisbonne (Portugal).

Cahen (**E.**), professeur au collège Rollin, rue de la Pompe, 32, à Paris.

Cantor (**Moritz**), Hofrath, professeur à l'Université, Gaisbergstrasse, 15, à Heidelberg (Allemagne).

Capelli (**Alfredo**), professeur à l'Université, 41, Juori Portamediana, à Naples (Italie).

Cartan (**Élie**), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Suchet, 38, à Lyon (Rhône).

Carvallo, examinateur de sortie à l'École Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris.

Caspary (**F.**), décédé.

Cellérier (**G.**), quai des Eaux-Vives, 34, à Genève (Suisse).

Charlier (**C.-V.-L.**), professeur à Lund (Suède).

Climesco (**Constantin**), professeur à l'Université, Strada Pacurari, 29, à Jassy (Roumanie).

Contarino (**Francesco**), astronome à l'observatoire de Capodimonte, à Naples (Italie).

Cosserat (**Eugène**), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse (Haute-Garonne).

Cotton (**Émile**), maître de conférences à l'Université de Grenoble (Isère).

Couturier (**Casimir**), à Melle-lez-Gand (Belgique).

Crawford (**G.**), Manilla Road Clifton, à Bristol (Angleterre).

Curjel (**H.-W.**), Welbeck Road, 18, à Birkdale, Southport (Angleterre).

Cyon (**E. de**), rue de Thann, 4, à Paris.

Czuber (**E.**), professeur à l'École Polytechnique supérieure, Neulinggasse, 3, à Vienne, III (Autriche).

Darboux (**G.**), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.

David (**E.**), Carmen Sylva, 6, à Bucarest (Roumanie).

Delahaye (**Georges**), à Roye (Somme).

Demoulin (**Alph.**), professeur à l'Université, rue du Bas-Polder, 20, à Gand (Belgique).

Dickson (**L.-E.**), Université de Chicago, 142, Faculty Exchange (États-Unis d'Amérique).

Dickstein (**S.**), rue Massalkowski, 117, à Varsovie (Russie).

Dilhau (**J.-J.**), professeur au lycée, rue Bourgneul, 29, à Bayonne (Basses-Pyrénées).

Dingeldey (**Fr.**), professeur à l'École Polytechnique, Grüner Weg, 13, à Darmstadt (Allemagne).

Drach (**J.**), maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).

Droz (**Auguste**), professeur au Gymnase, clos du Matin, 3, à Lausanne (Suisse).

Duporcq (**Ernest**), ingénieur des télégraphes, boulevard Pereire, 162, à Paris.

Ely Achsale (**Mme**), Vassar College, à Poughkeepsie, New-York (États-Unis).

Digitized by Google

MM.

Emelen (Van), rue Juste-Lipse, 20, à Louvain (Belgique).

Emine (Mehmed), ingénieur des télégraphes, à Constantinople (Turquie).

Fano (Gino), professeur à l'Université de Messine (Italie).

Fauquembergue (Élie), professeur au lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).

Fehr (Henri), professeur à l'Université, rue Gevray, 19, à Genève (Suisse).

Finger (J.), professeur à l'École Polytechnique supérieure, 35, Alleegasse, à Vienne, IV (Autriche).

Floquet (G.), professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).

Forsyth, Trinity College, à Cambridge (Angleterre).

Fouet, professeur à l'Institut catholique, rue Lhomond, 18, à Paris.

Fouret (G.), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.

Fredholm (Ivar), 30, Brahegatan, à Stockholm (Suède).

Fujisawa, professeur à l'Université impériale des Sciences, à Tokio (Japon).

Gaillot, sous-directeur de l'Observatoire, à Paris.

Galdeano (Zoël de), professeur à l'Université, coso 99, 3, à Saragosse (Espagne).

Gallardo (Angel), ingénieur civil, professeur suppléant à l'Université, 966, Santa-Fé, Buenos-Ayres (République Argentine).

Gauthier-Villars (Albert), ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.

Gavrilovic (B.), professeur à l'Université, à Belgrade (Serbie).

Geiser (C.-F.), professeur à l'École Polytechnique, Küssnacht, à Zurich (Suisse).

Gelin (Abbé), professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique).

Genaille (Henri), boulevard Rochechouart, 68, à Paris.

Gibson, Renfrew Street, 183, à Glascow (Écosse).

Godefroy, bibliothécaire de la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).

Godos (Garcia), professeur à la Faculté des Sciences de Lima (Pérou).

Gordan (Paul), professeur à l'Université, Gœthestrasse, 5, à Erlangen (Bavière).

Greenhill (A.), Ordnance College Woolwich, à Londres (Angleterre).

Guazzoni (P.-G.), à Busto-Arsizio, Lombardie (Italie).

Guccia (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).

Guimaraes (Rodolphe), membre de l'Académie des Sciences, rue Nova da Piedade, 55, à Lisbonne (Portugal).

Gutzmer, professeur à l'Université, Wildstrasse, 2, à Iéna (Allemagne).

Guyou, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue de Vaugirard, 71, à Paris.

Haas (Charles), Matrosengasse, 8, à Vienne, VI (Autriche).

Hadamard (Jacques), professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris.

Hagen (G.), director of the Georgetown College Observatory, West Washington (États-Unis).

Halsted (G.-B.), professeur à l'Université du Texas, Guadelupe Street, 2407, à Austin, Texas (États-Unis).

Hancock (Harris), professeur à l'Université de Cincinnati, Ohio (États-Unis).

Digitized by Google

MM.

Harkness (**J.**), Bryn Mawr College, à Bryn Mawr, Pensylvanie (États-Unis).

Haton de la Goupillière, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, rue de Vaugirard, 36, à Paris.

Heffter (**Lothar**), professeur à l'Université, Gœthestrasse, 17, à Bonn (Allemagne).

Henry, inspecteur général des ponts et chaussées, boulevard Saint-Germain, 22, à Paris.

Hermann, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris.

Hertzer (**Hugo**), professeur à l'École technique supérieure, Frobenstrasse, 14, à Berlin, W (Allemagne).

Hess (**Edm**), professeur à l'Université, Barfüsserthor, 5, à Marburg (Prusse).

Hilbert (**David**), professeur à l'Université, Wilh. Weberstrasse, 29, à Göttingen (Allemagne).

Hoffbauer (**Henri**), quai de Valmy, 17, à Paris.

Issaly (Abbé), rue Margaux, 16, à Bordeaux (Gironde).

Jaccottet (**Charles**), professeur à l'École industrielle de Lausanne (Suisse).

Jacquet (**E.**), professeur au Prytanée militaire, rue Couchot, 8, à La Flèche (Sarthe).

Jahnke (**Eugen**), assistant à l'Université de Berlin, Pariserstrasse, 55, à Berlin, W. 15 (Allemagne).

Jamet (**V.**), professeur au lycée, cours Lieutaud, 130, à Marseille (Bouches-du-Rhône).

Janisch (**E.**), Deutsche Staatsgewerbesschule, à Brünn (Autriche).

Jensen, ingénieur en chef des téléphones, Colbjornsensgade, 15, à Copenhague (Danemark).

Jolles (Mme **A.**), Humboldtstrasse, 2, à Halensee bei Berlin (Allemagne).

Jolles (**Stanislas**), professeur à l'École Polytechnique, Humboldtstrasse, 2, à Halensee bei Berlin (Allemagne).

Juel (**C.-S.**), professeur à l'École Polytechnique, Römersgade, 9, à Copenhague (Danemark).

Jürgens (**Enno**), professeur à l'École technique supérieure, Ludwigsallee, 79, à Aachen (Allemagne).

Kapteyn, Stationstrasse, 13, à Utrecht (Pays-Bas).

Keppel, Northwestern University, à Evanston, Illinois (États-Unis).

Kiepert (**Ludw.**), Geheimer Regierungsrath, Herrenhäuser Kirchweg, 20, à Hannover (Allemagne).

Koch (**H. von**), maître de conférences à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).

Korda (**Désiré**), chef du service électrique de la Compagnie Fives-Lille, rue Caumartin, 64, à Paris.

Krause (**Martin**), Geheimer Hofrath, professeur à l'École technique supérieure, Kaitzerstrasse, 12, à Dresde (Allemagne).

Laisant (**C.-A.**), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.

Lampe (**Émil**), Geheimer Regierungsrath, professeur à l'École Polytechnique, Kurfürstenstrasse, 139, à Berlin, W. 35 (Allemagne).

Lancelin (**F.**), astronome, boulevard Arago, 97, à Paris.

Digitized by Google

MM.

Larmor (**Joseph**), Saint Johns College, à Cambridge (Angleterre).

Laugel (**Léonce**), ancien attaché d'ambassade, chalet des Bruyères, au Golfe Juan (Alpes-Maritimes).

Leau (**L.**), professeur au collège Stanislas, rue Saint-Placide, 54, à Paris.

Léauté (**H.**), membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, boulevard de Courcelles, 18, à Paris.

Lebeuf, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de l'Université, 43, à Montpellier (Hérault).

Lebon (**Ernest**), rue des Écoles, 4 *bis*, à Paris.

Lecornu, ingénieur en chef des mines, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris.

Legras (**Gustave**), Lexington avenue, 17, à New-York (États-Unis).

Lémeray (**Maurice**), ingénieur civil du génie maritime, rue Ville-ès-Martin, 109 *bis*, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).

Lemoine (**Émile**), ancien élève de l'École Polytechnique, avenue du Maine, 32, à Paris.

Le Roux (**Jean**), maître de conférences à la Faculté des Sciences, faubourg de Fougères, 41, à Rennes (Ille-et-Vilaine).

Le Roy (**Édouard**), docteur ès sciences, rue de l'Abbé-de-l'Épée, 8, à Paris.

Levi-Civita, professeur à l'Université, via San Gaetano, 3394, à Padoue (Italie).

Lévy (**Lucien**), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris.

Lez (**Henri**), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).

Lindelöf (**Ernst**), professeur à l'Université, Boulevardsgatan, 12, à Helsingfors, Finlande (Russie).

Lindelöf (**L.-L.**), Boulevardsgatan, 12, à Helsingfors, Finlande (Russie).

Lindemann (**Ferd.**), professeur à l'Université, Franz-Josephstrasse, 12, à Munich (Bavière).

Lovett (**E.-O.**), professeur à l'Université, à Princeton, New-Jersey (États-Unis).

Lucas (**Félix**), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Boissière, 30, à Paris.

Lury (**A.-E. de**), Université de Toronto (Canada).

Lyon (**Joseph**), chemin de la Roseraie, 26, à Genève (Suisse).

Macfarlane (**A.**), Lehigh University, à South-Bethlehem, Pensylvanie (États-Unis).

Mackay (**S.**), Northumberland street, 69, à Édimbourg (Écosse).

Maggi (**J.-A.**), via Risorgimento, 1, à Pise (Italie).

Maillet (**Ed.**), ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine).

Manescu (**A.**), Strada Corvin, 4, à Jassy (Roumanie).

Mansion (**Paul**), professeur à l'Université, quai des Dominicains, 6, à Gand (Belgique).

Marchesini (**Alex.**), à Massa di Carrara (Italie).

Martin (**Artemas**), Columbia street, 1534, à Washington, D. C. (États-Unis).

Massau (**Junius**), rue Maruix, 22, à Gand (Belgique).

Digitized by Google

MM.

Maupin (**G.**), professeur au collège, à Issoire (Puy-de-Dôme).

Mehmke (**R.**), professeur à l'École technique supérieure, Weissenburgstrasse, 29, à Stuttgart (Wurtemberg).

Mestschersky (**J.-W.**), professeur à l'Université impériale, Wassili Ostrow, 5, ligne 4, log. 25, à Saint-Pétersbourg (Russie).

Meyer (**Fr.**), professeur à l'Université, Mitteltragheim, 51, à Kœnigsberg (Allemagne).

Minkowski (**Hermann**), professeur à l'École Polytechnique, Mittelstrasse, 12, à Zurich (Suisse).

Mittag-Leffler (**G.**), professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).

Molk (**Jules**), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).

Montessus (**de**), rue de Meaux, 12, à Senlis (Oise).

Montessus de Ballore (**R.-B. de**), à Toulon-sur-Arroux (Saône-et-Loire).

Moore (**E.-H.**), professeur à l'Université, à Chicago, Illinois (États-Unis).

Naud (**C.**), éditeur, rue Racine, 3, à Paris.

Niewenglowski (**B.**), inspecteur de l'Académie de Paris, rue de l'Arbalète, 35, à Paris.

Ocagne (**Maurice d'**), ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boëtie, 30, à Paris.

Onofrio (**Georges**), professeur aux Facultés catholiques, avenue de Noailles, 60, à Lyon (Rhône).

Padé (**H.**), professeur à la Faculté des Sciences, place Richebé, 11, à Lille (Nord).

Padoa (**Aless.**), via Pellegrino, 14, à Rome (Italie).

Painlevé, membre de l'Académie des Sciences, rue de Rennes, 99, à Paris.

Palmstrom, à Aas, près Christiania (Norvège).

Papelier (**Georges**), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).

Papperitz (**Erwin**), Weissbachstrasse, 5, à Freiberg, Saxe (Allemagne).

Peano (**Giuseppe**), professeur à l'Université, 4, via Barbaroux, à Turin (Italie).

Pell, Université de Dakota Sud (États-Unis).

Perrin (**Élie**), professeur de mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris.

Perrin (**R.**), ingénieur en chef des mines, avenue d'Eylau, 9, à Paris.

Petkovié (**G.-M.**), à Belgrade (Serbie).

Phragmén (**E.**), professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).

Picou (**G.**), rue de Paris, 123, à Saint-Denis (Seine).

Picquet (**H.**), chef de bataillon du génie, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 24, à Paris.

Pluchery (**J.-B.**), professeur au lycée, à Brest (Finistère).

Poincaré (**Henri**), membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.

Poggi (**Fr.**), professeur, Salita del Carmine, 7, à Gênes (Italie).

Ptaszycki (**Jean**), professeur à l'Université, rue Nadierdinska, 11, log. 20, à Saint-Pétersbourg (Russie).

Rados (**Gustav**), professeur à l'École royale Polytechnique, Csengery-Gasse, 1, à Budapest (Hongrie).

Digitized by Google

MM.

Ré (**A. del**), professeur à l'Université, à Naples (Italie).

Rémy (**Edgard**), professeur principal à l'École de Navigation, rue de Varsovie, 47, à Ostende (Belgique).

Richard (**J.**), professeur au lycée, rue Lakanal, 5 *bis*, à Tours (Indre-et-Loire).

Ripert, commandant du génie en retraite, rue Saint-Antoine, 200, à Paris.

Rius y Casas (**J.**), corso de San Miguel, 50, à Saragosse (Espagne).

Roche (**Louis**), rue Madame, 69, à Paris.

Rohn (**Karl**), professeur à l'École technique supérieure, Liebigstrasse, 8, à Dresde (Allemagne).

Rouché (**E.**), de l'Institut, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.

Runge (**Carl**), professeur à l'École technique supérieure, Körnerstrasse, 19, à Kirchrode, bei Hannover (Allemagne).

Sabinine (Mme **Olga**), 25, Arbatte Nicolwy, à Moscou (Russie).

Saintot (**P.**), professeur au collège, à Langres (Haute-Marne).

Sarauw (Mlle **Elna**), Frederihoberg Allé, 48, à Copenhague (Danemark).

Schiff (**de**), colonel, Fontanka, 112, à Saint-Pétersbourg (Russie).

Schiff (Mme **Vera de**), professeur au Cours Supérieur des Femmes, Fontanka, 112, à Saint-Pétersbourg (Russie).

Schröder (**Ernst**), Hofrath, professeur à l'École technique supérieure, Gottesauerstrasse, 9, à Carlsruhe (Allemagne).

Scott (Miss **Charl. Angas**), professeur au Bryn-Mawr College, à Bryn-Mawr, Pensylvanie (États-Unis).

Séguier (**J.-A. de**), docteur ès sciences, rue de Sèvres, 35, à Paris.

Selivanoff (**Dimitry**), chargé de cours à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Pétersbourg (Russie).

Selling (**Édouard**), professeur à l'Université, Maistrasse, 4, à Würzburg (Autriche).

Simonot, ingénieur du génie maritime, 37, rue Saint-Placide, à Paris.

Sintsof (**Dimitry**), professeur de mathématiques à l'École des Mines, à Ekaterinoslaw (Russie).

Soisson (**Guillaume**), professeur à l'Athénée, rue Joseph II, à Luxembourg.

Somigliana (**Carlo**), professeur à l'Université, Corso Cavour, 44, à Pavie (Italie).

Sousloff (**G.**), professeur à l'Université, rue Timofeivskaja, 6, à Kieff (Russie).

Sparre (Comte **Magnus de**), château de Vallière, à Saint-Georges-de-Reneins (Rhône).

Stampa (**Manuel-L.**), 56, Lopez Cotilla, Guadalajara, Mexico (Mexique).

Stephanos (**Cyparissos**), professeur à l'Université nationale, rue de Solon, 20, à Athènes (Grèce).

Störmer (**Carl**), chargé de cours à l'Université, Holtegaden, 14, à Christiania (Norvège).

Stringham (**Irving**), professeur de mathématiques à l'Université de Californie, à Berkeley, Californie (États-Unis).

Tannery (**Jules**), sous-directeur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.

Tarry (**G.**), receveur particulier, à Kouba (Alger).

Digitized by Google

MM.

Taylor (**W.-W.**), Baubury Road, 30, à Oxford (Angleterre).

Thompson (**Edw.-P.**), professeur à la Miami University, à Oxford, Butler Country, Ohio (États-Unis).

Tikhomandritzky (**M.**), professeur à l'Université, à Kharkoff (Russie).

Torrès (**L.**), ingénieur des ponts et chaussées, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).

Touche, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris.

Tripier (**H.**), rue Cavallotti, 17, à Paris.

Tudisca (**Gaspare**), professeur à Alghero, Sardaigne (Italie).

Tzitzeica (**G.**), professeur suppléant à la Faculté des Sciences, à Bucarest (Roumanie).

Vacca (**Giov.**), assistant à l'Université, via Bogino, 4, à Turin (Italie).

Vaës, Mathenesserlaan, 219, à Rotterdam (Pays-Bas).

Vailati (**Jean**), professeur au lycée royal, à Syracuse, Sicile (Italie).

Vasconcellos (**Urbano de**), rue Galvao-Bueno, 59, à San-Paulo (Brésil).

Vassilief (**Alex.**), professeur émérite à l'Université, à Kasan (Russie).

Veronese (Baronne **B. B.**). à Padoue (Italie).

Veronese (**G.**), professeur à l'Université, député au Parlement, à Padoue (Italie).

Villareal (**F.**), ingénieur, professeur à la Faculté des Sciences, à Lima (Pérou).

Vogt (**Henri**), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Grand-Verger, 29, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).

Volterra (**Vito**), professeur à l'Université, à Rome (Italie).

Volterra (**Mme V.**), à Rome (Italie).

Weber (**E. von**), Privatdocent à l'Université, Alexanderstrasse, 1, à Munich (Allemagne).

Webster, professeur à la Clark University, à Worcester, Massachusetts (États-Unis).

Weinmeister (**Ph.**), professeur à l'Académie royale de Saxe, à Tharandt, près Dresde (Allemagne).

Wernicke (**Paul**), Limestone street, 411, à Lexington, Kentucky (États-Unis).

Western (**A.**), Lancaster Gate, 36, à Londres (Angleterre).

Whitehead (**A.**), Fellow of Trinity College, à Cambridge (Angleterre).

Whittaker (**E.-T.**), Trinity College, à Cambridge (Angleterre).

Zaboudski (Col. **N.**), professeur à l'Académie d'artillerie, rue Znamenskaïa, 22, à Saint-Pétersbourg (Russie).

Zaremba, professeur au lycée, rue des Cadourgues, 18, à Cahors (Lot).

Zenger (**C.-V.**), membre de l'Académie Impériale des Sciences, Conseiller de la Cour, École polytechnique slave, à Prague (Autriche).

Zeuthen, professeur à l'Université, Sidealle, 3, à Copenhague (Danemark).

Zindler (**Konrad**), professeur à l'Université, Heiliggeiststrasse, 12, à Innsbrück (Autriche).

Zsigmondy (**Karl**), Schmerlingplatz, 2, à Vienne, I (Autriche).

Digitized by Google

EMPLOI DU TEMPS.

Dimanche 5 *août.*

8h 30m du soir : Réunion préparatoire au café Voltaire.

Lundi 6 *août.*

9h du matin : Séance générale d'ouverture au Palais des Congrès.

Mardi 7 *août.*

9h : Séances des sections I et II.
2h : Séances des sections III et IV.
4h : Lunch à l'École Normale supérieure.

Mercredi 8 *août.*

9h : Séances des sections V et VI.
2h : Séances des sections V et VI.

Jeudi 9 *août.*

9h : Séances des sections I et II.
2h : Séances des sections III et IV.

Vendredi 10 *août.*

9h : Séances des sections V et VI.
4h : Réception à l'Élysée.

Samedi 11 *août.*

9h : Séance de clôture.
9h 30m : Réception chez M. le prince Roland Bonaparte.

Dimanche 12 *août.*

11h 30m : Banquet, salle de l'Athénée Saint-Germain.
8h 30m : Soirée de gala à l'Opéra.

Digitized by Google

COMPTE RENDU RÉSUMÉ DU CONGRÈS.

Le second Congrès international des Mathématiciens s'est tenu à Paris, du 6 au 12 août 1900; on sait que le Congrès de Zurich en avait confié l'organisation à la Société mathématique de France.

L'Exposition universelle, qui avait lieu à Paris, présentait elle-même un attrait si considérable qu'il eût été difficile d'organiser avec succès, pour les membres du Congrès, des excursions spéciales ainsi que cela avait été fait à Zurich. Le Comité d'organisation a cru préférable de laisser toute liberté aux congressistes, et a dû se borner à quelques réunions, en dehors des séances proprement dites.

La première de ces réunions a eu lieu au café Voltaire, le dimanche 5 août, à $8^h 30^m$ du soir; avant l'ouverture officielle du Congrès, elle a permis à beaucoup de ses membres de prendre contact, de lier ou de relier connaissance.

Les congressistes se sont retrouvés le mardi 7 août à un lunch, servi à l'École Normale supérieure dont le Directeur, M. Perrot, avait eu l'extrême amabilité de mettre à notre disposition la salle des Actes; Mme Jules Tannery a bien voulu très gracieusement en faire les honneurs. MM. Perrot, Maurice Cantor et Darboux y ont successivement pris la parole en des toasts très applaudis.

Les congressistes ont été reçus le vendredi 10 août par M. le Président de la République, et le samedi 11 août, en même temps que leurs collègues du Congrès de Physique, par M. le prince Roland Bonaparte, dont on sait le généreux dévouement pour toutes les entreprises scientifiques.

Enfin, après la clôture du Congrès, ses membres se sont réunis, en grand nombre, le dimanche 12 août, à midi, en un banquet d'adieu, que beaucoup de dames et de jeunes filles ont bien voulu honorer et charmer de leur présence. Le Président du Congrès s'est malheureusement trouvé trop fatigué pour pouvoir y prendre part. De nombreux toasts ont été portés, d'abord par M. Darboux, qui a excusé M. Poincaré, puis par M. Geiser, au nom des congressistes étrangers, par M. J. Tannery qui a porté la santé des absents, par MM. Stephanos et Vassilief; M. Darboux, enfin, a repris la parole en son propre nom, et improvisé une charmante allocution, dans laquelle il a fait ressortir combien il est nécessaire aux

Digitized by Google

mathématiciens de se sentir les coudes, puisqu'il n'est pas de savants dont les travaux soient plus désintéressés, ni moins susceptibles de conquérir la masse des profanes.

Quelques congressistes se sont encore retrouvés le soir à l'Opéra, à une soirée de gala pour laquelle M. le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts avait bien voulu réserver quelques places à notre Congrès.

On trouvera ci-après le compte rendu des séances générales et de celles des sections; à l'exception de la séance d'ouverture qui s'est tenue au Palais des Congrès, situé dans l'enceinte de l'Exposition, elles ont eu lieu à la Sorbonne, dont le Recteur de l'Académie de Paris avait gracieusement mis à notre disposition les amphithéâtres Cauchy, Le Verrier et Chasles, de la Faculté des Sciences, ainsi que l'amphithéâtre Richelieu, pour la séance générale de clôture.

Digitized by Google

PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE D'OUVERTURE.

C'est au Palais des Congrès, édifié dans l'enceinte de l'Exposition universelle, que s'est tenue la séance d'ouverture le lundi 6 août, de neuf heures du matin à onze heures et demie. Dans l'assistance, beaucoup de dames et de jeunes filles aux claires toilettes.

M. Jules Tannery, au nom du Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts, dont il est le représentant officiel, déclare le Congrès ouvert et souhaite la bienvenue aux membres étrangers. Il propose de confier la présidence du Congrès à M. Henri Poincaré, qui est nommé par acclamation.

M. Poincaré remercie l'assemblée et propose de nommer président honoraire M. Hermite, que son grand âge a empêché de venir en personne assister aux travaux du Congrès, mais qui, néanmoins, dit M. Poincaré, « est de cœur avec nous ». Cette proposition est accueillie par des applaudissements prolongés.

Continuant sa brève allocution, le Président rappelle que, parmi les résolutions que devra prendre le Congrès, figure celle qui fixera la date et le siège du prochain Congrès, ainsi que les organes ou les associations chargées de le préparer et de l'organiser. Il mentionne que, lors du premier Congrès, beaucoup de mathématiciens avaient émis le vœu que le troisième Congrès se tînt à Baden-Baden.

Enfin, sur la proposition du Président, sont nommés par acclamation :

Vice-Présidents : MM. Czuber, Gordan, Greenhill, Lindelöf, Lindemann, Mittag-Leffler, Moore, Tikhomandritzky, Volterra, Zeuthen.

Secrétaire général : M. Duporcq.

Secrétaires : MM. Bendixson, Capelli, Minkowski, Ptaszycki, Whitehead.

Présidents des six sections : MM. Hilbert, Painlevé, Darboux, Larmor, prince Roland Bonaparte, Cantor.

Secrétaires des sections : MM. Cartan, Hadamard, Niewenglowski, Levi-Civita, d'Ocagne, Laisant.

Digitized by Google

Conformément au programme, le Président donne la parole à M. Moritz Cantor, qui lit en français sa conférence *Sur l'Historiographie des Mathématiques;* puis à M. Vito Volterra, qui lit, en français également, sa conférence intitulée : *Betti, Brioschi, Casorati.*

M. Rados prononce ensuite quelques paroles au nom du Ministre de l'Instruction publique de Hongrie, dont il est le délégué officiel.

Enfin, le Secrétaire général fournit quelques indications orales aux congressistes.

La séance est levée à $11^h 30^m$.

Digitized by Google

SÉANCES DE SECTIONS.

SECTION I. — ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE.

Mardi 7 août.

Présidence de M. HILBERT.

La séance est ouverte à 9^h à l'amphithéâtre Cauchy, de la Faculté des Sciences, sous la présidence de M. Hilbert. M. Cartan remplit les fonctions de Secrétaire.

M. Hilbert ouvre la séance par une petite allocution dans laquelle il souligne l'importance de l'Arithmétique et de l'Algèbre, qui constituent la grammaire des Mathématiques.

Communications :

1. L. Autonne, *Sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire quaternaire.*

M. Hilbert présente quelques remarques sur ce sujet.

2. H. Hancock, *Remarks on Kronecker's modular systems.*

M. Hilbert présente à ce sujet quelques remarques.

3. C. Stephanos, *Sur la séparation des racines des équations algébriques.*

Cette Communication est suivie de quelques observations du Président et d'un échange d'idées entre M. Stephanos et M. André, spécialement sur certains théorèmes que M. Stephanos croyait nouveaux et que M. André avait déjà énoncés.

4. Von Koch, *Sur la distribution des nombres premiers.*

M. Hilbert expose quelques idées personnelles à ce sujet et fait ressortir l'importance des résultats obtenus par M. von Koch.

La séance est levée vers 11^h.

Digitized by Google

Jeudi 9 août.

Présidence de M. HILBERT.

La séance est ouverte à 9^h à l'amphithéâtre Cauchy.

Communications :

5. R. Perrin, *Sur les propriétés d'un certain covariant de la forme binaire du cinquième ordre et leur application à la résolution de l'équation.*

Sur la demande de M. Gordan, l'auteur reprend quelques points de sa Communication.

6. L.-E. Dickson, *The known systems of simple groups and their inter-isomorphims.*

MM. Rados, Artemas Martin et Padoa, dont les Communications se trouvaient à l'ordre du jour, étant absents, la séance est levée à $10^h 30^m$.

Vendredi 10 août.

La Communication suivante de M. Padoa, se rattachant à la première Section, a pu être faite à une séance des Sections V et VI :

7. A. Padoa, *Un nouveau système irréductible de postulats pour l'Algèbre.*

On trouvera plus loin le développement des Communications précédentes, sauf celles de M. Stephanos et de M. Rados, qui ne nous ont pas été envoyées.

SECTION II. — ANALYSE.

Mardi 7 août.

Présidence de M. PAINLEVÉ.

La séance est ouverte à 9^h à l'amphithéâtre Le Verrier. M. Hadamard remplit les fonctions de Secrétaire.

Communications :

1. Tikhomandritzky, *Sur l'évanouissement des fonctions thêta de plusieurs variables.*

Digitized by Google

2. Mittag-Leffler, *Sur une extension de la série de Taylor.*

MM. Borel, Hadamard et Painlevé présentent quelques remarques sur la Communication précédente.

Jeudi 9 août.

Présidence de M. PAINLEVÉ.

3. I. Bendixson, *Sur les courbes définies par les équations différentielles.*

M. l'abbé Issaly profite de l'occasion offerte par la Communication de M. Bendixson pour parler des pseudo-surfaces. M. Hadamard présente une observation sur l'indication que fournit le résultat acquis par M. Bendixson, pour le cas où le second membre de l'équation différentielle est du troisième degré. Il croit qu'en l'absence d'une démonstration rigoureuse ce résultat ne permet que dans une certaine mesure de se faire une opinion sur ce qui se passe lorsque le degré de ce second membre est quelconque. Les questions relatives aux équations différentielles semblent être, en effet, de celles où l'on peut le moins se fier à ces sortes d'inductions. C'est ainsi que, pour les géodésiques des surfaces à courbures opposées, tant que l'ordre de connexion est égal à 1 ou à 2, les conclusions sont très simples et ne se distinguent pas de celles que donne la discussion relative à l'hyperboloïde à une nappe. Au contraire, dès que l'ordre de connexion est au moins égal à 3, les résultats changent entièrement de nature et deviennent relativement compliqués.

4. E. Jahnke, *Nouveaux systèmes orthogonaux pour les dérivées des fonctions thêta de deux arguments.*

5. J. Drach, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.*

6. Padé, *Aperçu sur les développements récents de la théorie des fractions continues.*

7. E. Cartan, *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales.*

On trouvera plus loin le développement de ces Communications, sauf celle de M. Bendixson, qui ne nous est pas parvenue, et celle de M. Cartan, qui a récemment paru dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (juillet 1901).

Digitized by Google

SECTION III. — GÉOMÉTRIE.

Mardi 7 août.

Présidence de M. G. DARBOUX.

La séance est ouverte à 2^h à l'amphithéâtre Cauchy. M. Niewenglowski remplit les fonctions de Secrétaire.

Communications :

1. E.-O. Lovett, *Sur les transformations de contact entre les lignes droites et les sphères.*

2. C. Stephanos, *Relations entre la Géométrie projective et la Mécanique.*

M. Massau rappelle un Mémoire qu'il a publié il y a quelques années sur des questions analogues.

3. A. Macfarlane, *Application of space analysis to curvilinear coordinates.*

La séance est levée à 4^h.

Jeudi 9 août.

Présidence de M. G. DARBOUX.

4. F. Amodeo, *Coup d'œil sur les courbes algébriques au point de vue de la gonalité.*

5. J. Stringham, *Orthogonal transformations in elliptic, or in hyperbolic space.*

6. V. Jamet, *Sur le théorème de M. Salmon concernant les cubiques planes.*

7. A. Padoa, *Un nouveau système de définitions pour la Géométrie euclidienne.*

M. Vassilief présente quelques observations sur cette Communication.

8. Abbé Issaly, *Sur les pseudo-surfaces en général et sur un exemple particulier de pseudo-surfaces minima.*

Après quelques observations du Président, la séance est levée à $5^h\,15^m$.

On trouvera plus loin le développement de ces Communications, sauf celle de M. Stephanos, qui ne nous a pas été envoyée, et celle de M. l'Abbé

Digitized by Google

Issaly, qui a été publiée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 53-86; 1901. On trouvera, en outre, une Note de M. F.-J. Vaës *Sur les corps réguliers et semi-réguliers*, dont l'auteur n'a pu assister au Congrès.

SECTION IV. — MÉCANIQUE.

Mardi 7 août.

Présidence de M. CZUBER.

La séance est ouverte à 2h à l'amphithéâtre Le Verrier. M. Levi-Civita remplit les fonctions de Secrétaire.

Communications :

1. I. Fredholm, *L'inversion des intégrales définies et son application aux problèmes de la Physique mathématique.*

Jeudi 9 août.

Présidence de M. LARMOR.

2. J. Boccardi, *Sur le calcul des perturbations spéciales des petites planètes.*

3. G. Sousloff, *Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.*

MM. Zenger et Somigliana, dont les Communications étaient à l'ordre du jour, se trouvant absents, le Président déclare épuisés les travaux de la Section.

Vendredi 10 août.

MM. Hadamard et Volterra ont néanmoins fait, le vendredi matin, à la séance des Sections V et VI, les Communications suivantes à rattacher à la Section de Mécanique :

4. J. Hadamard, *Sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.*

5. V. Volterra, *Sur les équations aux dérivées partielles.*

On trouvera plus loin le développement de ces deux Communications, ainsi que de celle de M. Boccardi.

Digitized by Google

SECTIONS V ET VI. — BIBLIOGRAPHIE ET HISTOIRE. ENSEIGNEMENT ET MÉTHODES.

Mercredi 8 août.

Présidence de M. M. CANTOR.

Première séance.

En raison de l'absence du Président de la cinquième Section, M. le prince Roland Bonaparte, les Sections V et VI se réunissent sous la présidence de M. Cantor, Président de la sixième Section. MM. d'Ocagne et Laisant remplissent les fonctions de Secrétaires.

La séance est ouverte à 9^h.

Communications :

1. D. Hilbert, *Sur les problèmes futurs des Mathématiques.*

M. Peano déclare que la Communication ultérieure de M. Padoa répondra au problème n° 2 de M. Hilbert. M. Mehmke rappelle qu'il a proposé certaines représentations monographiques dans l'espace d'où pourrait résulter une solution de l'équation générale du septième degré.

2. R. Fujisawa, *Note on the Mathematics of the old japanese school.*

M. A. Vassilief demande si l'on ne peut pas trouver les traces de l'influence grecque, par l'intermédiaire du royaume gréco-bactrien, sur les premiers géomètres japonais.

3. Leau, *Proposition d'un vœu pour l'adoption d'une langue scientifique universelle.*

Le vœu que M. Leau propose au Congrès d'émettre est le suivant :

1° *Il y a lieu d'adopter une langue scientifique et commerciale universelle.*

2° *Les Académies officielles sont respectueusement invitées à s'entendre pour la réalisation de ce projet.*

M. Leau propose, en outre, la résolution suivante :

Le Congrès décide de nommer cinq Membres à la Délégation qui se forme :

1° *Pour demander aux Académies officielles de vouloir bien adopter une langue auxiliaire universelle;*

Digitized by Google

2° *Pour faire ce choix elle-même ou par un Comité créé par elle, en cas de refus des Académies.*

Le Président, en raison de l'importance de ces décisions, propose de renvoyer la discussion à la séance du vendredi, afin de laisser aux congressistes le temps d'échanger leurs vues.

Avant de se séparer, on décide de continuer les travaux de la Section à 2^h. La séance est levée à $11^h 15^m$.

Seconde séance.

La séance est ouverte à 2^h.

Communications :

4. M. D'OCAGNE, *Sur les divers modes d'application de la méthode graphique à l'art du calcul.*

5. Z. DE GALDEANO, *Note sur la critique mathématique.*

M. Vassilief présente une remarque à ce sujet.

6. A. CAPELLI, *Sur les opérations fondamentales de l'Arithmétique.*

Une discussion s'engage sur la question entre MM. Capelli et Padoa.

7. M. LAISANT dépose sur le bureau quelques exemplaires d'un article de la *Bibliotheca mathematica* sur l'état d'avancement des travaux du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

8. M. LAISANT présente le premier fascicule d'un *Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français,* de M. Félix Muller.

La séance est levée à 4^h.

Vendredi 10 août.

Présidence de M. F. GEISER.

La séance est ouverte à 9^h.

Elle débute par la Communication de M. Padoa, rattachée à la première Section, et celles de MM. Hadamard et Volterra, qui se rapportent à la quatrième.

Elle est continuée par les Communications suivantes :

9. M. LAISANT lit une Note de M. CH. MÉRAY, Professeur à l'Université

Digitized by Google

de Dijon, *Sur la langue internationale auxiliaire de M. le Dr Zamenhof, connue sous le nom de « Esperanto »*.

10. La séance se poursuit par la discussion relative aux propositions de M. Leau, présentées dans la première séance de la Section et relatives à l'adoption d'une langue universelle, discussion qui, comme on l'a vu précédemment, avait été renvoyée à la séance actuelle. A cette discussion prennent part MM. Couturat, Laisant, Leau, Schrœder et Vassilief.

M. Vassilief estime que le mouvement qui a pour but d'introduire une langue universelle est très sympathique et a de grandes raisons d'être, par suite de la variété rapidement croissante des langues qui sont employées maintenant par les savants pour la publication de leurs Ouvrages. Tandis que, dans le commencement du XIXe siècle, il suffisait pour un savant de connaître le latin, le français et l'anglais (Gauss écrivait en latin), le nombre des langues employées dans la littérature scientifique a crû par suite des mouvements nationaux et continue à croître. Par exemple, dans ces dernières années, on a publié d'intéressants Mémoires mathématiques en langues serbe, croate et en langue petite-russienne. La grande ardeur avec laquelle les Japonais poursuivent les études scientifiques nous mettra en face d'une littérature japonaise si les savants japonais ne veulent plus faire œuvre d'abnégation en faveur des grands intérêts de la Science comme ils l'ont fait jusqu'ici. Ce sera pour la Science un grand péril que dix, vingt ou trente langues scientifiques; néanmoins, M. Vassilief pense que ce n'est pas une langue artificielle, telle que la langue *Esperanto,* ou une langue morte comme le latin, qui puissent remplacer les langues vivantes, organismes dus au travail de plusieurs générations de penseurs et d'écrivains. Aussi est-ce, selon lui, dans une autre voie qu'il faut chercher la solution du problème posé par les propositions de M. Leau. Il faut exprimer le désir que les publications faites dans les langues peu répandues soient suivies par des résumés rédigés dans une langue plus connue dans le monde scientifique, comme le font maintenant les Académies de Copenhague, de Cracovie, la *Société minéralogique de Saint-Pétersbourg;* il faut que les œuvres complètes des savants de premier ordre soient publiées en deux langues, comme l'a fait l'Académie de Saint-Pétersbourg pour les *Œuvres de Tchebycheff,* que les Académies favorisent les Ouvrages tels que le *Dictionnaire mathématique français-allemand,* de Félix Muller, ou la publication de l'*Encyclopédie mathématique* de Meyer et Burkhardt en langue française. En conséquence, M. Vassilief propose d'exprimer le vœu suivant, plus général que celui de M. Leau, et qui peut avoir plus de conséquences pratiques : *que les*

Digitized by Google

Académies et Sociétés savantes de tous les pays étudient les moyens propres à remédier aux maux qui proviennent de la variété croissante des langues employées dans la littérature scientifique.

Ce vœu est adopté par la majorité des congressistes présents.

11. M. R. Guimaraës dépose sur le bureau quelques exemplaires d'un Mémoire *Sur les Mathématiques en Portugal au* XIXe *siècle,* Mémoire historique et bibliographique que M. Guimaraës avait été chargé de rédiger en vue de l'Exposition universelle.

Dans cette monographie, il fait un rapide examen des travaux de ses compatriotes, parus au cours du XIXe siècle, en suivant dans cette étude le classement, la notation et les abréviations adoptées par la Commission du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.* On y trouve le compte rendu de 769 travaux, dont 226 appartiennent à l'Analyse, 192 à la Géométrie et 351 aux Mathématiques appliquées.

12. E. Maillet, *Sur l'utilité de la publication de certains renseignements bibliographiques en Mathématiques.*

MM. Dickstein et Laisant présentent quelques remarques à ce sujet.

13. M. Vassilief communique à la Section que le Professeur D.-M. Sintsof a publié dans le *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan* (Vol. VII, VIII, IX), sous le titre : *Bibliographica mathematica rossica,* la liste détaillée et systématique des Ouvrages et des articles mathématiques publiés en Russie dans les années 1896, 1897 et 1898.

On trouvera plus loin le développement de la Communication de M. Hilbert qui, en raison de sa grande importance, a été placée parmi les conférences. On trouvera, en outre, sous le titre de la cinquième Section, la Communication de M. Fujisawa et une Communication de M. A. Gallardo *Sur les Mathématiques et la Biologie,* qui était à l'ordre du jour, mais dont l'auteur s'est trouvé absent. Sous le titre de la sixième Section, on trouvera les développements des Notes de MM. d'Ocagne, de Galdeano, Capelli, Méray et Maillet, ainsi qu'un Mémoire de M. Veronese, *Sur les postulats de la Géométrie dans l'enseignement,* dont l'auteur n'a pu assister au Congrès.

Digitized by Google

SÉANCE DE CLOTURE.

La séance de clôture s'est ouverte le samedi 11 août à 9^h, à l'amphithéâtre Richelieu, sous la présidence de M. Poincaré.

Il s'agit tout d'abord de s'entendre sur la préparation et la date du prochain Congrès. On décide qu'il aura lieu en 1904 et l'on charge la *Société mathématique allemande* du soin de l'organiser et de choisir elle-même la ville où il se tiendra.

Au nom de plusieurs Membres du Congrès, M. Laisant propose d'envoyer le télégramme suivant à M. Hermite, en villégiature à Saint-Jean-de-Luz :

« *Le Congrès international des Mathématiciens envoie l'expression de son admiration et de sa sympathie respectueuse au géomètre illustre qui honore son pays et le monde scientifique entier par son talent aussi bien que par son caractère. C'est unanimement que les Mathématiciens de toutes les nations forment pour M. Hermite les vœux les plus sincères de bonheur et de santé* (1). »

La proposition de M. Laisant est votée par acclamation.

Le Congrès vote ensuite des remercîments à M. Gréard, recteur de l'Université de Paris, pour l'hospitalité qu'il a bien voulu lui accorder à la Sorbonne.

La séance est terminée par la conférence de M. Henri Poincaré, *Sur le rôle de l'intuition et de la logique en Mathématiques,* et celle de M. G. Mittag-Leffler, intitulée : *Une page de la vie de Weierstrass.*

A $11^h 30^m$ le Président déclare clos les travaux du Congrès.

---

(1) Au reçu de cette dépêche, M. Hermite a répondu par le télégramme suivant, adressé à M. Poincaré, mais qui est parvenu malheureusement trop tard pour qu'on pût en donner connaissance aux Membres du Congrès :

« Veuillez être auprès des Membres du Congrès l'interprète de mes sentiments de reconnaissance et leur exprimer combien je suis profondément touché du témoignage de leur sympathie; il me parvient au terme de ma carrière, il m'est la plus haute et la meilleure récompense, il me comble de joie et d'honneur en rattachant les liens de l'affection à ceux de la Science; j'y réponds de tout cœur en remerciant les amis que je dois à l'étude, en leur adressant mes vœux pour le succès du Congrès, pour qu'il seconde leurs travaux et contribue au magnifique avenir de l'Analyse dans les voies nouvelles qu'elle s'est ouvertes. CHARLES HERMITE. »

Digitized by Google

Digitized by Google

SECONDE PARTIE.

CONFÉRENCES ET COMMUNICATIONS.

CONFÉRENCES.

SUR

L'HISTORIOGRAPHIE DES MATHÉMATIQUES,

PAR M. MAURICE CANTOR (Heidelberg).

Lorsqu'en juin 1899 le Comité organisateur me fit l'honneur de me demander une Conférence dans une des deux séances générales du Congrès international des Mathématiciens à Paris, la première question devant laquelle j'hésitais fut celle de la langue dans laquelle je m'exprimerais. L'internationalité du Congrès et le règlement adopté à Zurich en août 1897 me permettaient d'employer ma propre langue, d'autre part, et sans préjudice pour mon estime de la profonde érudition de mon auditoire à laquelle nulle langue ne saurait être étrangère en théorie, je me disais qu'en pratique je serais mieux compris par un certain nombre de personnes en parlant français.

Dans cette pensée je me rencontrai sans nous concerter avec les autres orateurs choisis pour parler dans les séances générales. Nous

Digitized by Google

employerons tous les quatre la langue du pays dans la capitale duquel nous nous trouvons réunis aujourd'hui, et qui est celle de la grande majorité des membres présents.

La seconde question sur laquelle je devais me fixer fut celle du sujet dont je tâcherais de vous entretenir. Les Mathématiques dans le siècle sur la limite duquel nous nous trouvons ont pris un élan presque inouï.

Elles ont perdu pour ainsi dire leur unité antérieure pour se multiplier. Le mathématicien s'est dérobé par une trappe naguère invisible dans le podium du théâtre des Sciences, et par une autre trappe on a vu surgir des géomètres, des analystes, des algébristes, des arithmologues, des astronomes, des physiciens théoriques, et même des historiographes. Ces derniers, si vous voulez me permettre de parler en leur nom, n'ont jamais eu la prétention de faire avancer les Sciences mathématiques dans une quelconque de ces branches à pas redoublés. Nous ne nous sommes avancés ni vers le pôle arctique du calcul des fonctions, ni vers le pôle antarctique de l'Algèbre plus loin que nos prédécesseurs, nous n'avons pas découvert les propriétés des surfaces plus ou moins escarpées de la Géométrie, nous ne sommes pas descendus jusqu'au fond dans le gouffre des équations différentielles. C'est vous, et je pourrais facilement citer des noms et montrer du doigt les porteurs de ces noms immortalisés, à qui ce mérite est dévolu. Mais nous, les historiographes des Mathématiques, qu'avons-nous fait?

Nous avons composé des Guides de voyageurs. Nous avons décrit qu'à telle époque tel fleuve a été rendu navigable, tel canal, telle grande route, tel chemin de fer a été construit, délaissé aujourd'hui dans de certains cas, employé plus que jamais dans d'autres, méritant d'être repris dans de troisièmes. Nous avons montré que ces moyens de communication tout en conduisant d'un endroit à l'autre ne manquaient pas de passer à côté de certains points remarquables, dignes de s'y arrêter et pas encore aussi connus qu'ils en valent peut-être la peine. Nous avons réclamé chaque chemin autant que possible pour celui qui l'a défrayé, acte de reconnaissance dont la

Digitized by Google

justice devrait être avouée le plus libéralement par ceux qui eux-mêmes ont droit à une reconnaissance semblable.

Charité bien comprise commence par soi. Pourquoi la reconnaissance ne l'imiterait-elle pas? Permettez-moi d'en agir de la sorte et de faire dans une courte esquisse l'histoire de l'Historiographie des Mathématiques.

Pour commencer par le commencement il faudrait prendre par bien haut. Les successeurs d'Aristote, les péripatéticiens, aimaient à chercher et à trouver une source personnelle des connaissances humaines, et ils se réjouissaient d'autant plus s'il leur était possible de découvrir cette source dans un des pays lointains subjugués par Alexandre, le disciple de leur maître. C'est de ce penchant que sont nés les premiers essais d'Histoire des Sciences. Eudème de Rhodes a composé une Histoire des Mathématiques à une époque très voisine de l'an 300 avant le commencement de l'ère chrétienne. Cette Histoire des Mathématiques, nous ne la possédons pas. Certains fragments seulement s'en sont conservés d'une manière ou de l'autre et nous font regretter vivement ce que nous avons perdu. Eudème, à en juger par ces fragments, aimait à dessiner avec un crayon hardi le profil scientifique des mathématiciens dont il nous a gardé les noms. Il semble avoir donné plutôt une histoire de leurs idées que de leurs personnes, qui peut-être à son époque étaient encore trop connues pour qu'il fallût s'y arrêter.

Vous ne m'en voudrez pas si d'un seul bond je saute plus de deux mille ans afin d'arriver au milieu du XVIIIe siècle. Non qu'il n'y ait eu dans tout cet intervalle des essais d'Histoires des Mathématiques. Loin de là! Je pourrais vous citer des écrivains jadis célèbres en France, en Italie, en Hollande, en Allemagne, qui ont fait de leur mieux, mais malheureusement leur mieux ne valait guère comparé à ce qu'on a fait depuis et à ce qu'on demande aujourd'hui. Les De la Ramée, les Baldi, les Vossius, les Heilbronner se contentaient en général de dire que tel auteur avait écrit sur tel chapitre tel ouvrage, mais si l'on voulait savoir ce qu'il y avait de nouveau dans ces ouvrages ou quel était l'œuvre scientifique d'un auteur, on restait

Digitized by Google

sans réponse. Je me borne donc à cette courte remarque pour motiver mon saut périlleux d'Eudème à Montucla.

Qui ne connaît Jean-Étienne Montucla, de Lyon, dont la vie a duré de 1725 à 1799? Ayant acquis dans le collège des Jésuites de sa ville natale des connaissances peu communes de langues étrangères et de Mathématiques il était muni des deux outils principaux qu'il lui fallait pour accomplir sa tâche scientifique avant même de l'avoir comprise. En effet, il commença par des études de droit à Toulouse et ce ne fut qu'en second lieu qu'il vint à Paris faire des études générales. Il devint un habitué de la maison hospitalière de l'éditeur-libraire Jombert, et c'est là qu'il fit la connaissance des autres intimes de la maison, parmi lesquels je ne citerai que Da Gua de Malves, d'Alembert, de Lalande. C'est peut-être Da Gua de Malves, dont les Mémoires algébriques de 1741, commençant par des introductions historiques très étendues, donnèrent à Montucla l'idée de s'en prendre lui-même à un problème de Mathématique et d'en suivre le développement historique. L'*Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* parut en 1754, Ouvrage consciencieux si jamais il en fut, fourmillant de détails oubliés depuis longtemps qu'il fallut déterrer dans des auteurs eux-mêmes moins connus qu'ils ne méritaient. Le petit Volume eut un succès complet, et ce ne fut pas plus tard que 1758 que Montucla le fit suivre de son *Histoire des Mathématiques*. Les lecteurs d'aujourd'hui ne connaissent généralement que les deuxièmes éditions des Ouvrages que nous venons de citer, l'édition des *Recherches sur la quadrature* de 1831 de Lacroix, l'édition de l'*Histoire des Mathématiques* de 1799 de de Lalande. Dans cette dernière les deux Volumes sortant de la plume de l'auteur même sont complétés par deux autres Volumes composés par de Lalande. Jugés à eux seuls ces derniers ne seraient pas mauvais, n'était-ce que la proximité des deux premiers Volumes leur fit du tort. Involontairement on se met à comparer, on trouve une distance énorme en valeur des deux premiers Volumes aux deux derniers, et au lieu de louer Montucla on se contente de blâmer de Lalande.

Pendant un certain temps, il était même de bon ton de dénigrer

Digitized by Google

aussi Montucla. Il a ignoré l'existence de tel monument, il n'a pas reconnu la portée de tel manuscrit, il a mal traduit telle phrase. Tout cela est parfaitement vrai, mais peut-on raisonnablement demander d'un seul auteur ce que douze autres ou davantage ont fait plus tard à forces réunies? Peut-on, s'il m'est permis de reproduire une phrase que j'ai employée autrefois, reprocher à un cartographe de l'année 1850 d'avoir laissé en blanc la partie centrale de l'Afrique avant qu'elle fût explorée? Non, et mille fois non! Certainement, Montucla n'est plus aujourd'hui l'auteur presque infaillible qu'il faut consulter sur n'importe quelle question d'Histoire des Mathématiques, il est tombé maintes fois dans des erreurs inévitables pour lui, mais il est encore et restera peut-être toujours un modèle que tout historiographe des sciences doit suivre, modèle aussi en tant qu'il a éprouvé ses forces dans une monographie avant d'entamer son Ouvrage universel.

Le siècle touchait à sa fin, lorsque deux Ouvrages parurent, qui nous demandent de passer les frontières de la France et de nous rendre en Allemagne d'abord, puis en Italie.

Abraham Gotthelf Kaestner, né à Leipzig en 1719, mort à Goettingen en 1800, publia, dans les quatre dernières années de sa vie, autant de volumes d'Histoire des Mathématiques. On a encensé Kaestner pendant sa vie, on a écrit sur son buste : « Kaestner l'unique », et, plus tard, on s'est moqué de lui; on l'a nommé « le meilleur poète parmi les mathématiciens, le meilleur mathématicien parmi les poètes de son temps », et c'est Gauss qui est l'auteur de cette épigramme sanglante. Il ne serait pas difficile de démontrer qu'il y a eu de l'exagération de part et d'autre dans ces évaluations aussi opposées que possible du même auteur, mais je m'en tiens et je dois m'en tenir à son *Histoire des Mathématiques*. Je ne pèserai pas sur l'âge de Kaestner lors de cette publication. Être octogénaire, c'est une excuse pour ne plus rien faire, mais non pas pour lancer dans le public des mauvais livres. Ne croyez pourtant pas que ce soit là la qualité que j'attribue à son Histoire. C'est un Ouvrage qui est loin de nous présenter ce que son titre promet, mais dont, malgré cela,

Digitized by Google

à l'opinion unanime des connaisseurs, on ne saurait se passer dans des travaux historiques. Kaestner a dû posséder une bibliothèque des plus riches, et, dans son *Histoire des Mathématiques*, il en a donné la description consciencieuse et détaillée en réunissant par ordre chronologique les Ouvrages d'un contenu semblable. C'est ainsi que, par Kaestner, nous connaissons et connaissons même assez bien une quantité d'auteurs, dont le nom même nous serait inconnu sans lui, et nombre de volumes introuvables aujourd'hui.

L'Ouvrage italien que j'annonçais tout à l'heure est d'une qualité bien différente. C'est l'Histoire critique de l'origine de l'Algèbre, de son arrivée en Italie et des progrès qu'elle y fit, par Pietro Cossali, imprimée en deux volumes, de 1797 à 1799, à Parme où l'Auteur était professeur d'Astronomie et des Sciences attenantes. En 1806, Cossali passa à Padoue où il est mort en 1815, âgé de soixante-sept ans et demi. On a dit, avec un grand fond de raison, que l'Ouvrage de Cossali rendait superflu tout autre Ouvrage sur l'Algèbre en Italie dans l'époque limitée par les années 1200 et 1600, et, comme les Italiens, dans cette époque, marchaient à la tête de l'Algèbre, il ne faut comme complément que des recherches sur quelques algébristes des autres pays qui, comme Jordanus Nemorarius, comme Nicolas Chuquet, comme Michael Stifel, comme François Viète, ont inscrit leur nom sur des pages manquant et devant manquer chez Cossali, mais absolument nécessaires dans une Histoire générale de l'Algèbre. Le mérite de Cossali est d'autant plus grand que, pour ses recherches sur Léonard de Pise, auteur qu'il a pour ainsi dire découvert, il ne pouvait avoir recours qu'à des manuscrits parfois difficiles à trouver, plus difficiles à déchiffrer. C'est Cossali qui a mis le prince Boncompagni sur les traces de ce négociant du XIIIe siècle, ami d'un prince, prince lui-même parmi les amis des Sciences mathématiques. Et c'est Cossali aussi qui a su entrer dans l'esprit de Girolamo Cardano, qui a fait ressortir les vérités découvertes par cet homme de génie en les traduisant d'une langue à peine compréhensible dans une langue à la portée de tout mathématicien. On a blâmé cette traduction. On a dit que c'était fausser

Digitized by Google

un auteur que de changer sa manière de s'exprimer. Je ne suis point de cet avis. Nul plus que moi ne se met en garde contre le penchant de prêter à un auteur des idées postérieures à son siècle, mais s'il ne s'agit que d'un changement de locutions, je crois que nous devons en savoir gré à qui nous préserve de devoir nous servir à chaque instant d'un dictionnaire, et Cossali, à mon opinion, n'a rien fait de plus.

Je vous reconduis en France où Charles Bossut, né en 1730 à Tartaras, mort en 1814 à Paris, comme examinateur auprès de l'École Polytechnique, publia en 1810, lui aussi octogénaire tout comme Kaestner, deux petits volumes in-octavo portant le titre d'*Histoire générale des Mathématiques depuis leur origine jusqu'à l'année* 1808. Dans ces deux volumes, vous ne trouverez pas de figure géométrique, pas d'équation. C'est assez vous dire que Bossut n'a pas voulu entrer dans le détail des sciences, dont il signale seulement le développement très général. Ce sont des aperçus, des coups d'œil rapides pris de certains points de vue, des raisonnements pleins d'attraits pour ceux qui savent, peu utiles pour ceux qui ont besoin d'apprendre. Quant aux erreurs qui se trouvent dans Bossut, dans Cossali, c'est la même chose qu'avec les erreurs de Montucla. Il ne faut pas les leur imputer; ce sont les défectuosités de leur époque et non de leur personne.

Passons de nouveau sur une trentaine d'années pour arriver à des auteurs que les plus âgés d'entre nous ont pu connaître personnellement étant jeunes. Oui, il doit y avoir parmi vous des personnes qui, aussi bien que moi, se souviennent de la petite figure affable et spirituelle de Michel Chasles, qui croient entendre encore les paroles aimables par lesquelles il se plaisait à rendre le courage à ceux de ses jeunes émules qu'un premier échec avait terrifiés, à aiguillonner ceux qu'un premier succès aurait pu rendre vains et fainéants. Je le vois toujours devant moi me parlant pour la première fois dans le corridor qui mène à la salle des séances de l'Académie des Sciences, me faisant l'accueil le plus aimable, me traitant en collègue, moi tout jeune homme qui n'avais publié qu'un pauvre petit Mémoire

Digitized by Google

que j'avais eu l'audace de lui envoyer. Je le vois me recevant dans une maison de campagne à Saint-Germain, en compagnie de M. Bienaimé et de M. Joseph Bertrand dont, de cette manière, il me fit faire la connaissance. Je le vois me rendant visite dans une petite chambre au cinquième de la rue Saint-Lazare et assis à côté du lit où j'étais retenu malade.

Pardonnez-moi, si je vous parle de ces souvenirs personnels avant que de parler de l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie* de 1837. C'est comme une photographie de l'auteur mise à la tête de son Ouvrage et rehaussant l'intérêt qu'on lui porte. Bien entendu que l'*Aperçu historique* n'a pas besoin d'une telle réclame, Ouvrage qui a eu l'honneur d'une traduction en allemand dès 1839 et d'une réimpression en 1875.

Dans l'*Aperçu historique*, il faut bien distinguer entre le texte et les notes. Le texte donne une histoire de la Géométrie, et surtout de la Géométrie synthétique, assez brève et condensée, faisant appel à la foi du lecteur pour les thèses qui y sont formulées. Ce sont les notes explicatives au bas des pages, et surtout les notes ayant la dimension de véritables Mémoires et qui servent d'appendice au Volume, où l'on trouve discutés en détail les documents que le savoir profond de l'auteur a su déterrer. C'est là la partie modèle de l'Ouvrage, sur laquelle plus d'un historiographe des Mathématiques s'est formé. Dans ces notes, Chasles a dépassé le but annoncé par le titre. Ce ne sont pas seulement les méthodes de la Géométrie dont il s'agit, la numération et le calcul, l'Algèbre, la Mécanique, y sont traités tour à tour avec une érudition magistrale. Chasles a fait encore en 1871 un *Rapport sur les progrès de la Géométrie* plein d'intérêt, mais traitant peut-être de choses et de personnes trop prochaines pour pouvoir porter sur elles un jugement historique. Ajoutons que dans le *Rapport* l'ignorance de la langue allemande, moins nuisible dans l'*Aperçu historique*, qui ne traite en général que des Ouvrages écrits ou traduits en français, en latin, en italien, rarement en anglais, se fait sentir désagréablement, malgré les soins que Chasles a mis à se faire traduire pour son usage et même par

Digitized by Google

écrit des Ouvrages allemands qu'il ne comprenait pas et qu'il désirait connaître.

Tout près de Michel Chasles vivait à Paris Guillaume Libri. Le comte Libri Carucci della Sommaja est né à Florence, en 1803. Professeur de Mathématiques à Pise, il se rendit coupable d'opinions sinon d'actions taxées, dans ce temps, de subversives, et dut se réfugier en France en 1830. Il y fut naturalisé en 1833, devint professeur d'Analyse à la Sorbonne, membre de l'Académie des Sciences, inspecteur général des bibliothèques. On connaît l'abus qu'il fit de cette dernière position. En 1848, il quitta le sol de la France, devenu trop brûlant pour lui. Il passa en Angleterre, plus tard en Italie, où il mourut à Villa Fiesole, en 1869. Dans les années 1837 à 1841, Libri publia son *Histoire des Mathématiques en Italie,* conduisant, en quatre volumes, jusqu'à la mort de Galilée, c'est-à-dire jusqu'au milieu du XVIIe siècle. Peut-on écrire convenablement l'Histoire des Mathématiques dans un pays quelconque? J'en doute fort, et voici pourquoi. S'il existe une Science internationale par excellence, ce sont les Mathématiques. Le Droit, la Théologie, la Philosophie, la Littérature facile, l'Histoire, peuvent porter et portent, en effet, généralement un timbre national que je ne tiens ni à louer ni à blâmer, mais à signaler seulement. Dans les Mathématiques, il en est tout à fait autrement. Depuis les temps les plus reculés, l'influence d'un peuple sur un autre où il s'agit de connaissances mathématiques ne s'est pas dérobée un seul instant. On ne saurait comprendre le développement des Mathématiques en Grèce sans connaître l'état de cette science en Égypte et en Babylonie. Les Mathématiques romaines sont isssues des Mathématiques grecques, qu'elles présupposent. Pour les Mathématiques des Arabes, la situation est semblable, impossible de s'y orienter sans avoir étudié les Mathématiques des Égyptiens, des Grecs, des Hindous. Arrivons-en aux temps après l'invention de l'imprimerie; c'est bien autre chose encore. Tant que la langue latine était la langue des savants de tout pays, il n'y avait pas de frontière pour les livres, et plus tard, quand on s'habitua à écrire chacun dans

Digitized by Google

son idiome, les frontières à peine établies s'effacèrent de nouveau pour ceux qui, outre la Science, possédaient aussi plusieurs langues modernes. Comment donc discerner, dans le courant du fleuve commun, les sources de chaque petit ruisseau qui y a contribué; comment réciproquement décrire une source en s'y arrêtant ou passer auprès d'elle en la négligeant, avant de savoir si elle était destinée à produire, dans un autre pays, un fleuve, ou à tarir dans le sable? On me dira que, pourtant, tout peuple a eu son temps où il marchait à la tête d'une Science ou de l'autre. C'est parfaitement vrai; mais, parce que c'est vrai pour tous les peuples, cela prouve d'autant plus la difficulté d'écrire l'Histoire de cette Science chez un seul peuple, sinon pour l'époque pendant laquelle ce peuple faisait avancer cette Science. Vous vous rappellerez qu'en d'autres mots, j'ai déjà dit à peu près la même chose en parlant de l'Ouvrage de Cossali.

Les intervalles pendant lesquels d'autres peuples avaient à accomplir la même mission scientifique resteront des lacunes, des crevasses, pour ainsi dire, qu'on ne peut ni sauter ni tourner sans mettre les pieds dans un terrain étranger. Comment Libri s'est-il tiré de ce dilemme dans son *Histoire des Mathématiques en Italie?* Il l'a simplement escamoté. Pour lui et pour le lecteur qui se laisse entraîner par un style admirable, par les accents d'un patriotisme chaleureux, mais mal placé, il n'y a que les Italiens et quelques Français qui ont fait faire des progrès aux Mathématiques. Il s'arrête auprès des uns, il nomme en passant les autres et voilà tout. Des auteurs comme Michael Stifel n'existent pas pour lui, et s'il trouve chez un Italien, disons chez Tartaglia, des inventions de ce prédécesseur incommode, c'est Tartaglia à qui on doit en être redevable et qui en est l'auteur. Vous voyez par ce petit exemple que l'on ne peut suivre Libri qu'avec beaucoup de précautions. Ces précautions prises, il est indiscutable que Libri a rendu des services énormes à l'Historiographie des Mathématiques. Il a étudié nombre de manuscrits dont il donne des extraits pour la plus grande partie très exacts, et, comme je le disais déjà, il manie la langue avec un

Digitized by Google

art tout à fait hors ligne. Son *Histoire des Mathématiques en Italie* se lit comme un roman, même dans les parties où elle n'en est pas un.

Un an après le quatrième volume de Libri, les amis de l'Histoire des Mathématiques purent saluer en Allemagne l'apparition d'un chef-d'œuvre digne d'être mis à côté de l'*Aperçu historique* de Chasles. Je parle de l'*Histoire de l'Algèbre* de Nesselmann, à laquelle je ne connais qu'un seul défaut, celui d'en être restée au premier volume.

Non que le temps ait manqué à Nesselmann de continuer l'Ouvrage dont il publia le premier volume à l'âge de 31 ans, en 1842. Nesselmann vécut jusqu'en 1881, mais, pour des motifs que je n'ai pas pu parvenir à éclaircir, il a délaissé le sentier qu'il avait entamé avec tant de succès, et, à dater de 1845, il n'a publié que des Ouvrages de Philologie. Nous ne possédons donc de lui, comme Histoire de l'Algèbre, que l'Histoire de l'Algèbre grecque.

La suite chronologique des publications me conduit à C.-J. Gerhardt, mort en mai 1899, à l'âge de 83 ans. Sa première occupation avec un sujet historique remonte même jusqu'en 1837, où il écrivit un Mémoire : *Sur les principes du calcul différentiel,* couronné par l'Université de Berlin qui avait posé cette question comme sujet d'un prix universitaire, et, depuis ce temps, Gerhardt n'a pas cessé de se vouer à l'étude de Leibniz, de ses rivaux et de ses émules. Il a fouillé à plusieurs reprises, dans la bibliothèque de Hanovre, le commerce littéraire et les manuscrits laissés par Leibniz, il y a trouvé des documents d'une date tantôt certaine, tantôt probable, qu'il a publiés, et qui lui ont permis de faire l'Histoire véritable de l'invention du Calcul infinitésimal. C'est là et dans la rédaction des Œuvres complètes de Mathématique et de Philosophie de Leibniz, confiée à Gerhardt par l'Académie de Berlin, que repose son grand mérite qu'on ne doit pas lui disputer en s'appuyant sur de petites erreurs qui se sont glissées par-ci par-là dans ses Ouvrages comme dans ceux de tout autre.

Un reproche qu'on peut lui adresser avec raison, c'est celui d'un certain mépris de travaux contemporains, que peut-être il n'a pas

Digitized by Google

même lus, dont certainement il ne s'est pas servi comme il avait le devoir de le faire. C'est qu'il était pénétré de la conviction d'être à lui seul le régénérateur des études de l'Histoire des Mathématiques. Or l'orgueil ne manque jamais d'être nuisible. On confia à Gerhardt une autre tâche aussi, celle d'écrire une Histoire des Mathématiques en Allemagne, et le petit volume par lequel il s'en déchargea, porte la date de 1877. En parlant de Libri, j'ai dit ce que je pensais de l'Histoire des Mathématiques dans un seul pays. Le volume de 306 pages publié par Gerhardt n'en est pas meilleur pour conduire depuis l'année 700 environ jusqu'en 1850. Voyageant pour ainsi dire en ballon, il ne s'arrête que sur les cimes des montagnes et encore en oublie-t-il pas mal.

Adolphe Quételet, le directeur de l'observatoire de Bruxelles, qui dans sa longue vie, depuis 1796 jusqu'en 1874, a bien mérité des Sciences les plus variées, a publié deux Volumes, l'un en 1864, l'autre en 1866, sur l'Histoire des Sciences mathématiques et physiques en Belgique. Je les cite pour avouer qu'ils me semblent bien préférables à l'Ouvrage dont je viens seulement de dire quelques mots.

Je remonte quelques années pour nommer l'*Histoire des Mathématiques pures* d'Arthur Arneth de 1852. L'auteur a été pendant plusieurs années mon collègue à Heidelberg, où il est né en 1802 et mort en 1858. Arneth a voulu raconter l'Histoire des Mathématiques comme faisant partie de l'histoire du développement de l'esprit humain, et, en marquant ce but, il s'est posé un problème digne d'être résolu, mais qui ne saurait être traité dans 291 pages.

L'Introduction et une première Partie très générale fourmillant de remarques aussi spirituelles que profondes remplissent 67 pages; 73 pages sont vouées aux Mathématiques grecques, 45 à celles des Hindous, 49 à celles des Arabes, des Romains, du moyen âge, en conduisant jusqu'à la moitié du XVIe siècle. Faites le compte et vous trouverez qu'il reste tout juste 58 pages pour l'époque commençant en 1550 à peu près pour finir en 1800. C'est tout dire. Arneth aurait pu faire un livre excellent, quoique laconique au superlatif, s'il avait pris garde à bien disposer de l'espace convenu avec l'éditeur.

Digitized by Google

Il a négligé cette première règle d'un auteur (et laissez-moi ajouter, entre parenthèses, d'un orateur aussi) et son livre en a souffert.

Le dernier Ouvrage, dont je veux parler, a eu un sort très différent de ceux que j'ai nommés jusqu'ici. Tous ont été publiés par leurs auteurs surveillant la publication et s'en rendant, par conséquent, responsables. Si Montucla n'a pu compléter sa deuxième édition, il en a du moins vu imprimer les deux premiers Volumes. Hermann Hankel est mort en 1873 à l'âge de 34 ans seulement, avant qu'une page de son Ouvrage sur l'Histoire des Mathématiques ne fût imprimée. Il n'a laissé qu'un torse, mais un torse d'une telle beauté qu'il eût été pitié de ne pas le mettre au grand jour. Il y a des inégalités, de légers défauts que le burin de l'artiste aurait sans doute fait disparaître s'il en avait eu le temps, mais la beauté générale n'en est amoindrie que minimement.

Hankel était, vous le savez tous, un mathématicien de grand talent, il possédait de même toutes les connaissances et toutes les aptitudes à désirer pour l'historiographe des Mathématiques. Le fragment publié en 1874 après sa mort nous montre et nous fait regretter ce dont on aurait pu s'attendre, s'il avait vécu.

Je vous ai fait passer en revue très sommairement un assez grand nombre d'Ouvrages sur l'histoire des Mathématiques, et j'en aurais pu facilement doubler sinon tripler le nombre. J'ai omis tous les Ouvrages dont les auteurs sont encore en vie et dont je ne veux blesser ni la modestie ni l'opinion, peut-être trop favorable, qu'ils se sont faite de leurs travaux. J'en ai omis qui ont été écrits par des auteurs tout aussi morts que leurs Livres; gardons-nous de les ressusciter. J'ai omis les auteurs qui, comme les Maclaurin, les Lagrange, les Gauss, auraient mérité d'être mentionnés pour les admirables Introductions historiques dont ils ont enrichi leurs productions célèbres. J'ai omis aussi de vous parler d'un grand nombre d'écrivains qui n'ont composé que des Mémoires historiques soit dispersés, soit réunis dans un Volume, mais ne constituant pas un Ouvrage suivi. Je pense aux Reimer, aux de Morgan, aux Biot, aux Giesel, aux Ofterdinger, aux Bierens de Haen, dont certainement je ne me

Digitized by Google

serais pas tu, si je n'avais craint de dépasser de beaucoup le temps permis.

Mais devrais-je m'attirer ce reproche, je ne saurais passer en silence le prince Baldassare Boncompagni, ce Mécène Romain qui avait voué son temps, son travail, sa fortune au culte de l'Histoire des Mathématiques. Ses recherches sur Gérard de Crémone, sur Platon de Tivoli, sur Léonard de Pise sont reconnues comme de grande valeur, mais c'est surtout par l'édition faite à ses frais des Ouvrages de Léonard de Pise et de différents autres auteurs et par la publication des vingt volumes de son *Bulletino* distribués d'une main généreuse qu'il a donné un impulsion vive et subsistante à la Science qu'il chérissait. Boncompagni avait réuni une bibliothèque mathématique sans pareille contenant plus de six cents manuscrits à côté de milliers de Livres imprimés. Il est bien à regretter qu'aucun État, aucune Académie n'ait eu le désir ou les moyens d'acquérir en bloc toutes ces richesses qui, soumises à une vente publique, se sont vues dispersées sans retour possible.

Il y a peut-être dans mon auditoire des personnes assez étonnées de voir combien grande est la cohorte des auteurs qui ont droit au titre d'historiographe des Mathématiques. En effet cette branche n'a jamais été aussi délaissée que l'on croyait. Elle n'a jamais eu pourtant autant de succès que depuis une vingtaine d'années à peu près. La Science est féminine, et le genre féminin aime se mettre à la mode qui change toujours pour revenir après un certain temps. Dans les sciences ce sont telles ou telles matières qui ont été en vogue naguère, dont on ne parle presque plus aujourd'hui, qui reviendront sous une forme nouvelle. Aujourd'hui que l'Historiographie scientifique a su entrer en faveur, permettez-moi de finir par quelques mots sur la manière future d'écrire l'Histoire des Mathématiques.

Ai-je besoin de m'expliquer plus amplement sur ce que j'ai en vue? Je ne pense nullement à ces parties de l'Histoire des Mathématiques, dont d'autres ont, dont j'ai moi-même tâché de faire le récit détaillé. Je pense à l'Histoire des Mathématiques depuis 1759, époque moins fortuite qu'elle n'en a l'air, puisque c'est l'année dans laquelle

Digitized by Google

Lagrange a publié son premier Mémoire, ce mathématicien illustre que l'Italie a possédé depuis sa naissance en 1734 jusqu'en 1766, puis l'Allemagne jusqu'en 1786, enfin la France jusqu'à sa mort en 1813, le créateur pour ainsi dire des Mathématiques modernes. Mon excellent ami, M. Paul Tannery, a soutenu et beaucoup d'autres se sont rangés du même avis, qu'à dater de cette époque il devenait impossible de traiter le sujet en question de la même manière que dans les temps antérieurs. Les sections qu'on est obligé d'introduire dans tout Livre d'histoire afin de pouvoir s'y orienter se seraient multipliées dès l'année 1600 environ en traitant des intervalles de plus en plus raccourcis, par contre les Chapitres se fondant sur les matières traitées se seraient accrus démesurément, où en viendrait-on à la fin? On demande une nouvelle répartition conforme à la distribution du travail mathématique dont il a été question au commencement de mon discours. On veut dorénavant, et certainement on n'a pas tout à fait tort, que l'Histoire générale des Mathématiques cède la place à des Histoires de la Géométrie, de l'Analyse, de l'Algèbre, etc., voire même de parties beaucoup plus spéciales. Je dis qu'on n'a pas tout à fait tort ou, ce qui revient au même, qu'on n'a pas tout à fait raison, parce que je crois que ce qu'on demande ne suffit pas à lui seul.

Permettez-moi d'employer une image. Je parlais tout à l'heure de modes. J'ai vu tantôt une coiffure de dames fin de siècle ou nouveau siècle, comme vous voudrez, car je n'aime pas les discussions sur les goûts, les couleurs et le commencement du siècle, j'ai vu, dis-je, une coiffure consistant dans une multitude de mèches entrelacées qui formaient des nattes dont chacune touchait les autres d'une manière artistiquement combinée. Je tâchais de suivre les contours d'une seule mèche. Rien de plus facile. Il n'y a qu'à la retirer de la coiffure. Oui, mais la coiffure elle-même sera détruite.

Vous me direz qu'en fondant une démonstration sur des images on peut aisément prouver tout ce qu'on veut. J'en conviens pourvu que vous conveniez que dans mon image il y a du vrai et voici la conséquence que j'en tire. J'admets que l'Histoire des Mathéma-

Digitized by Google

tiques modernes aura besoin d'être étudiée dans divers Volumes destinés chacun à l'Histoire détaillée d'une branche spéciale.

Mais ces histoires partielles une fois écrites comme préparatifs indispensables, il faudra un dernier Volume résumant le tout, faisant ressortir les grandes idées du siècle, n'importe à l'occasion de quel problème elles auront l'air d'être nées, car au bout du compte le mot qu'on prête à Jacobi, qui aurait commencé par lui un cours universitaire, est bien vrai. Les Mathématiques sont une Science dont on ne saurait comprendre une partie sans connaître toutes les autres. Ce dernier Volume, l'*Histoire des Idées* comme je me suis permis de le nommer, sera bien difficile à composer, beaucoup plus difficile que les Volumes qui précéderont, mais il sera indispensable. C'est ainsi que je crois comprendre la tâche de nos successeurs.

Digitized by Google

BETTI, BRIOSCHI, CASORATI,

TROIS ANALYSTES ITALIENS

ET

TROIS MANIÈRES D'ENVISAGER LES QUESTIONS D'ANALYSE,

PAR M. VITO VOLTERRA (Rome).

Dans l'automne de l'année 1858, trois jeunes géomètres italiens partaient ensemble pour un voyage scientifique.

Leur but était de visiter les Universités de France et d'Allemagne, d'entrer en rapport avec les savants les plus remarquables, d'en connaître les idées et les aspirations scientifiques et, en même temps, de répandre leurs travaux.

Ce voyage entrepris par Betti, Brioschi et Casorati marque une date qu'il est bon de rappeler. L'Italie allait devenir une nation. Elle entre à partir de cette époque dans le courant des grands travaux scientifiques et, par un nombre de travailleurs toujours croissant, apporte sa contribution à l'œuvre commune.

Dans ce jour où tant de mathématiciens se réunissent en inaugurant un échange fécond d'idées, j'aime à rappeler ce souvenir.

Il serait impossible de comprendre et de suivre les progrès de l'Analyse en Italie, dans la seconde moitié du XIXe siècle, sans connaître à fond l'œuvre poursuivie avec patience et avec énergie pendant un grand nombre d'années par les trois géomètres dont je viens de rappeler les noms, secondés par les efforts de leurs meilleurs élèves.

C'est à leur enseignement, à leurs travaux, au dévouement infatigable avec lequel ils poussaient les élèves et les jeunes savants vers les recherches scientifiques, à l'influence qu'ils ont exercée dans l'organisation des hautes études, aux rapports qu'ils ont établis entre

Digitized by Google

notre patrie et l'étranger que nous devons d'avoir vu naître en Italie une jeune école d'analystes.

Et cependant il suffit de lire un seul Mémoire de chacun de ces mathématiciens pour se convaincre tout de suite que leurs facultés naturelles étaient bien différentes. Leurs vies se sont écoulées en des milieux divers, de façons aussi très diverses, et leurs esprits ont acquis des orientations presque opposées. Ils ont été dès lors amenés, par une foule de circonstances, à regarder l'Analyse sous des points de vue très dissemblables. Mais de cette manière leur œuvre, dans son ensemble, a été bien plus utile et bien plus complète, car ils ont fait converger des courants et des tendances différentes sur les jeunes savants italiens, en pénétrant de plusieurs côtés dans leurs esprits et en faisant ressortir en eux toutes les espèces de talent géométrique.

Betti, Brioschi, Casorati ont disparu maintenant à peu de distance l'un de l'autre, mais leur souvenir reste toujours et les germes qu'ils ont semés ont produit leurs fruits.

Nous gardons en Italie des sentiments de douce affection et une gratitude sans bornes pour ces maîtres bien-aimés et, puisque l'un de nous avait eu l'honneur d'être appelé à parler dans cette réunion, j'ai cru interpréter les sentiments de tous en évoquant leurs images.

Cette tâche n'est pas aisée, mais je compte pour la faciliter sur les sentiments de vénération dont je suis animé, et aussi, Messieurs et chers Confrères, sur votre bienveillance.

Aucun de ceux qui ont pris part au Congrès de Zurich ne pourra jamais oublier la figure de Brioschi. Ses cheveux blancs et son grand âge ne s'accordaient pas avec l'éclat de ses yeux qui gardaient des éclairs de jeunesse, et avec son infatigable activité. Mais ce contraste représente d'une manière frappante son individualité, car il a été toujours jeune par son caractère et toujours mûr par son esprit.

Né dans l'ancienne capitale de la Lombardie qui allait devenir le centre industriel le plus important et le plus riche de l'Italie, il fut d'abord ingénieur; mais, attiré vers les Mathématiques pures, il acquit dès son jeune âge une connaissance presque complète des œuvres

Digitized by Google

classiques et, âgé de vingt-cinq ans, fut appelé à l'Université de Pavie comme titulaire de la chaire de Mécanique.

Dès cette époque commencèrent sa production scientifique et son influence dans l'enseignement. Elles ne cessèrent que le jour de sa mort.

Après la constitution du royaume d'Italie on a une nouvelle phase de la vie de Brioschi, car son activité se tourna vers les affaires politiques où il joua depuis lors un rôle important. Il abandonna l'Université et, devinant l'avenir industriel de sa patrie, il fonda l'École Polytechnique dont il fut l'organisateur et dont il resta le directeur pendant toute sa vie.

Mais il continua toujours par ses Ouvrages scientifiques, par son rôle de Directeur des *Annali di Matematica,* par celui de Président de l'*Accademia dei Lincei,* à diriger le mouvement mathématique en Italie, tandis qu'il remplissait ses fonctions de sénateur, faisait partie d'un grand nombre de commissions parlementaires, et s'occupait aussi de travaux publics et de l'art de l'ingénieur. Activité rare et phénoménale qu'on a peine à concevoir et qui nous frappe d'admiration!

La vie de Betti fut calme, autant que celle de Brioschi fut agitée.

Betti naquit en Toscane dans un petit village sur la montagne, où les habitants simples et adroits ont un esprit très fin et un goût naturel pour l'Art et la Poésie.

Il perdit son père pendant qu'il était enfant, et ce fut sa mère qui soigna son éducation. Élève de Mossotti à l'Université de Pise, il commença par devenir professeur dans un petit lycée de Toscane, et c'est seulement à l'âge de trente-quatre ans qu'il obtint une chaire à l'Université, et, sept ans après, la direction de cette École Normale supérieure de Pise dont l'organisation est à peu près celle de l'École Normale supérieure de Paris.

Betti n'aimait pas, comme Brioschi, les charges de la vie publique. Il fut élu député et nommé sénateur; mais il ne prit jamais, comme son collègue, une part active aux mouvements politiques.

Digitized by Google

Lorsqu'il était à Rome sous-secrétaire d'État pour l'Instruction publique, il regrettait toujours la vie de professeur, le calme de la petite ville de Pise, les mois passés à la campagne dans une douce méditation ou dans des entretiens, toujours remplis de mots spirituels, avec ses amis et avec ses élèves.

Betti, en dehors des affections familiales, n'aima qu'une chose : les recherches scientifiques entreprises dans un but philosophique.

Il les aima en effet pour elles-mêmes, sans songer aux satisfactions d'amour-propre qu'elles pouvaient lui donner, sans songer non plus aux effets qu'elles pouvaient produire dans le monde savant ni à l'importance qu'elles pouvaient avoir dans l'enseignement.

Lorsqu'il avait satisfait le besoin d'arriver aux vérités les plus cachées, lorsqu'il les avait reliées entre elles et avait créé dans son esprit un système où elles ressortaient des principes les plus simples, tout était fait pour Betti. Il n'aimait même pas, dans bien des cas, exposer ses résultats au public, ou, s'il en commençait la rédaction, il s'arrêtait souvent parce que de nouvelles idées le tentaient, et il lui était pénible de ne pas suivre l'inspiration du moment.

On voit à l'Académie des Beaux-Arts de Florence une statue ébauchée par Michel-Ange. La figure de saint Mathieu sort à peine du marbre ; mais les lignes principales sont arrêtées. Cette ébauche avait satisfait le grand artiste, qui, voyant que son idée pouvait être réalisée, ne voulut plus continuer son travail.

On peut comparer bien des travaux de Betti, et peut-être les plus beaux, à l'ébauche de Michel-Ange.

L'esprit de Casorati était d'une nature différente : il vécut et travailla presque exclusivement pour ses élèves et pour son école.

Ses travaux en effet ont presque tous ce cachet spécial qui révèle que le but de l'auteur était d'éclaircir quelque point obscur, ou de corriger quelque résultat, ou d'exposer d'une manière critique un corps de doctrines.

Mais quelle originalité dans la critique, quel talent dans l'exposition d'une théorie, qui devenait une nouvelle théorie en vertu du

Digitized by Google

point de vue d'où Casorati l'envisageait, combien de résultats nouveaux et complètement inattendus ressortaient d'une simple erreur qu'il corrigeait!

Sa vie s'écoula presque exclusivement à Pavie, sa ville natale. Il était fils d'un médecin, qui était aussi professeur à l'Université de Pavie, et étudia, dans cette Université, sous la direction de Bordoni et de Brioschi dont il devint l'assistant.

Casorati parcourut ensuite tous les grades universitaires en échangeant la chaire de Géodésie contre celle d'Algèbre et enfin celle-ci contre la chaire d'Analyse infinitésimale qu'il garda jusqu'à sa mort.

Les travaux qu'il publiait et ses cours, qui étaient très suivis et très écoutés, avaient toujours des rapports entre eux; quelquefois même, s'il abandonnait un travail pour en entreprendre un autre, il changeait soudainement le sujet de son cours.

C'est pourquoi, dans son esprit, il n'y avait pas de distinction entre l'œuvre du professeur et l'œuvre du savant, qui s'accordaient ensemble d'une manière admirable et féconde.

Il suffit d'avoir exposé en peu de mots la vie des trois géomètres et leurs tendances pour comprendre quelle différence il y avait entre eux, et combien étaient dissemblables les mécanismes de leurs intelligences.

Aussi ont-ils été conduits à envisager l'Analyse en général et chaque question particulière de façons bien diverses.

On pourrait suivre la trace de leurs esprits dans toutes les branches des Mathématiques et montrer que cette diversité se révèle à chaque pas de leurs recherches. Mais il serait trop difficile d'envisager du même coup toute leur œuvre, tandis qu'il est bien plus aisé d'avoir égard à une branche spéciale où ces trois géomètres ont laissé des traces profondes.

La théorie qui a eu le plus grand développement dans les derniers temps est sans aucun doute la théorie des fonctions.

On pourrait même appeler notre siècle, au point de vue des Ma-

Digitized by Google

thématiques, le *siècle de la Théorie des fonctions*, comme le XVIIe siècle pourrait être désigné par le nom de *siècle du Calcul infinitésimal.*

En effet, nous avons assisté à ce fait : toutes les branches de l'Analyse ont conduit au progrès de cette théorie, et en même temps c'est de la théorie des fonctions que les Mathématiques ont tiré leurs plus puissantes ressources. Nous avons même pu voir s'accomplir un phénomène très singulier : certaines théories et certaines méthodes de la Géométrie synthétique, qui devaient leur origine à une sorte de réaction contre l'esprit analytique, se sont peu à peu rapprochées de la théorie des fonctions et enfin se sont liées intimement à elle dans les idées fondamentales et dans les applications.

Il existe bien des travaux historiques et critiques sur la théorie des fonctions. Les plus savants géomètres ont donné sur elle des essais précieux, riches des plus intéressantes notices.

Mais jetons un coup d'œil d'en haut sur le chemin parcouru, envisageant dans son ensemble le développement de la théorie.

Nous distinguons tout de suite trois phases différentes qui marquent presque trois périodes distinctes.

D'abord s'élaborent des théories particulières. C'est leur développement qui montre la nécessité de créer une théorie générale des fonctions transcendantes et des fonctions algébriques, qui embrasse tous les cas connus et en prévoit de nouveaux. Dans cette phase on ne connaît pas encore de méthodes uniformes. Chaque question qui se présente, on doit tâcher de la résoudre : voilà ce qui s'impose. Les méthodes, il faut les créer chaque fois et à chaque pas. De longs calculs sont nécessaires et les pensées qui sont renfermées dans les formules ne se dégagent que peu à peu.

Les grands noms d'Euler, de Jacobi, d'Abel peuvent être pris pour personnifier cette période héroïque où la théorie des fonctions elliptiques a été créée dans ses parties essentielles, et où ont été marquées les lignes principales où devaient se développer un jour les fonctions abéliennes.

Mais à cette période de découvertes merveilleuses, où ce qui

Digitized by Google

domine est la curiosité d'arriver en possession de vérités inattendues qui se dévoilent soudainement à travers de longs calculs et des inductions audacieuses, succède bientôt une phase où l'esprit philosophique a le dessus et où s'impose la nécessité de la recherche d'une méthode générale et puissante qui embrasse et renferme tout dans un cadre unique en constituant un corps de doctrine.

Cette phase est marquée par les œuvres immortelles de Cauchy, de Weierstrass et de Riemann qui sont remontés aux sources mêmes des conceptions fondamentales pour accomplir leur tâche. C'est dans cette période grandiose que les idées remplacent peu à peu les calculs.

Il y a enfin une dernière phase où les théories trouvent leurs plus importantes et leurs plus fécondes applications, les formes les plus appropriées à leur diffusion, et restent fixées dans un cadre didactique, après avoir été passées en revue et discutées par le plus fin esprit critique qui ait jamais dominé la Science.

Ces trois phases, dont nous avons tâché de donner les principaux caractères, correspondent à peu près à trois périodes successives dans l'histoire de la théorie des fonctions, mais elles correspondent aussi à trois manières d'envisager les questions d'Analyse; et certains géomètres restent attachés à l'une ou à l'autre en vertu même des qualités les plus intimes de leurs esprits.

Brioschi, ingénieur et homme pratique, habitué à voir le but que l'on poursuit et à ne pas trop s'inquiéter des méthodes, est resté toujours fidèle à la direction classique et aux procédés d'Euler et de Jacobi.

Pour son activité infatigable les longs calculs ne sont pas une gêne. Son esprit habitué à démêler les choses les plus inextricables de la vie réelle voit à travers une forêt de calculs comme à travers un cristal limpide.

Beltrami a dit de lui dans son langage fleuri que je m'efforce de traduire :

« Ses formules agiles et pénétrantes remplissent comme un trésor

Digitized by Google

inépuisable tous ses travaux, et c'est par là qu'il acquit la réputation d'une virtuosité sans égale dans l'Analyse la plus raffinée....

» Comme un habile musicien fait ressortir la mélodie qui marche tranquille et sereine au milieu des notes et des modulations qui se poursuivent et s'entrelacent, de la même manière Brioschi faisait jaillir le résultat analytique qu'il cherchait d'un appareil de symboles formidable et artificiel, mais plein d'élégance et de symétrie artistique. »

C'est à cause de cela qu'il est resté complètement étranger à tout le mouvement qui s'est développé peu à peu et qui caractérise le passage de la première à la seconde phase. Je dirai même qu'il le dédaignait un peu. Combien de fois l'ai-je entendu se plaindre des mathématiciens modernes, qui n'ont plus l'habitude de faire de longs calculs, et combien de fois suis-je resté surpris en entendant des louanges pour un travail, ou pour certaine partie d'un travail, parce qu'il contenait des calculs bien faits.

Nous voyons ainsi Brioschi traduire et populariser en Italie le *Traité des fonctions elliptiques* de Cayley et, même dans un Ouvrage sur les fonctions hyperelliptiques qu'il composait et imprimait lorsque la mort l'a fauché, il ne s'éloignait pas des méthodes qu'il avait préférées depuis le commencement de sa carrière.

Nous avons déjà signalé que Betti était d'une nature différente, je dirai même opposée à celle de Brioschi. Ce qui manque à l'un, l'autre le possède. Si on les avait réunis, on aurait eu un esprit complet.

Le désir d'un but à atteindre n'empêchait pas Betti de voir ce qui l'entourait et de s'attarder à mi-chemin pour trouver des rapports et des comparaisons avec bien d'autres choses.

Cette sorte de paresse toscane, qui n'est pas de la paresse intellectuelle, faisait qu'il aimait plutôt penser que travailler d'une manière mécanique.

C'est pourquoi ces longs calculs, que le rude Lombard aimait, lui étaient insupportables. Bien souvent ils l'auraient conduit à des

Digitized by Google

fautes sans le flair mathématique très fin qu'il possédait. Son esprit large et cultivé aimait plutôt lés systèmes philosophiques.

Par l'ensemble de ces circonstances, il est aisé de comprendre qu'il se rattache à la seconde phase dont nous avons parlé. Mais ce qu'il y a de vraiment singulier, je dirai plutôt de merveilleux dans l'Œuvre de Betti, c'est qu'il peut rattacher son nom aux deux grandes méthodes qui ont divisé le champ de la théorie des fonctions, qu'on a même montrées parfois en opposition l'une avec l'autre.

C'est par sa propre initiative, sans connaître le grand travail que Weierstrass poursuivait en silence, qu'il parvint d'emblée, par un vrai coup de génie, à l'un des points fondamentaux de cette théorie : la décomposition des fonctions entières en facteurs primaires.

Il publia, en 1862, le Mémoire qui contient ce résultat et ses applications aux fonctions eulériennes, trigonométriques et elliptiques, et c'est seulement quinze ans après qu'il sut que Weierstrass possédait une théorie complète des facteurs primaires.

Mais Betti, depuis l'époque où il avait commencé l'impression de son Mémoire, n'avait plus pensé à son théorème. Le Mémoire était resté inachevé et oublié par l'auteur même, et un nouvel ordre d'idées lui avait fait changer complètement la direction de ses études.

Riemann était venu en Italie, et s'était lié pendant son séjour à Pise d'une amitié très intime et très affectueuse avec Betti. Celui-ci embrassa ses idées et depuis cette époque ses travaux se ressentent tous de l'influence directe de Riemann.

Betti n'a publié qu'une petite partie de ce qu'il a produit dans cette direction. Bien des choses sont restées toujours inédites. Entre autres, il essaya une théorie nouvelle des fonctions elliptiques en l'établissant sur leur construction par des propriétés qui les caractérisent au contour du parallélogramme des périodes.

C'est peut-être le dernier pas qu'on puisse faire dans cette direction et, quoique la méthode soit très artificielle, ce qui fait qu'elle ne se prête pas à une exposition didactique, il serait intéressant qu'elle fût connue.

Digitized by Google

Il est très singulier de voir un seul esprit concevoir l'une après l'autre deux théories si différentes et ne pas s'attacher à l'une plutôt qu'à l'autre. Il abandonne la première pour la seconde qu'il ne publie même pas. Toujours est-il que l'empreinte du vrai génie se montre dans cette richesse d'idées. Malheureusement pour sa renommée, son insouciance pour tout ce qui n'était pas la satisfaction intime d'une découverte nouvelle fit tomber dans l'oubli des résultats du plus haut intérêt et en rapport avec des conceptions nouvelles qui n'étaient pas encore prêtes à devenir courantes.

Cependant ce fait singulier a une explication. Il touche aux sources mêmes des deux célèbres méthodes, et on pourrait dire qu'on a par là une confirmation de leur origine différente.

En effet, si nous pénétrons le sens intime des méthodes de Riemann, nous voyons que ce qui les caractérise est leur liaison avec les conceptions fondamentales de la Physique.

Les méthodes de Riemann représentent le transport des procédés de la théorie de l'électricité dans celle des fonctions d'une variable complexe.

Or, Betti était autant mathématicien que physicien théorique et sa pensée a été toujours dirigée vers les phénomènes naturels.

Nous savons que, pour bien des mathématiciens, les théories deviennent plus fécondes lorsqu'on attache aux formules des significations qui dépassent le sens purement analytique. Pour certains esprits, les formules représentent des faits géométriques qui leur donnent une représentation concrète. D'autres savants sont amenés à rattacher, autant qu'il est possible, aux résultats analytiques des phénomènes physiques qui les caractérisent en leur donnant une netteté qu'ils n'auraient pas par eux-mêmes.

Ceux qui ont connu Betti, non seulement par ses travaux, mais aussi par sa conversation, savent que s'il parlait Mathématiques, bien souvent il pensait Physique. Comme un de ces éclairs qui dans la nuit révèlent le chemin qu'on parcourt, quelquefois un mot qui lui échappait révélait soudainement cette disposition naturelle de son esprit.

Digitized by Google

Betti était donc tout préparé pour suivre et pour embrasser les méthodes de Riemann avec l'enthousiasme qu'il mettait en toute chose.

Une sorte de réaction lui fit abandonner les procédés qu'il avait d'abord suivis et qui l'avaient conduit aux remarquables résultats dont nous avons parlé.

Nous sommes sûrs maintenant que ces procédés étaient plus féconds et plus appropriés à l'application qu'il avait en vue aux fonctions elliptiques, mais Betti ne s'en aperçut pas.

Il avait été conduit tout d'abord à les suivre par le tour qu'avait pris son esprit en conséquence de ses premières études. C'est l'Algèbre en effet qui avait formé, pendant presque une dizaine d'années, le sujet de ses recherches et, s'il est possible de caractériser par un mot sa première théorie des fonctions transcendantes, c'est en l'appelant une *théorie de type algébrique*. Mais lorsque son tempérament de physicien prit le dessus sous l'influence de Riemann, l'initiation algébrique n'eut plus de prise sur lui et sa vraie nature et ses facultés s'épanchèrent librement dans un champ sans limites.

L'esprit critique de Casorati, son amour pour l'enseignement, sa tendance aux applications, rattachent son nom à la troisième phase dont nous avons parlé.

Il commença, en 1868, son grand Ouvrage sur les fonctions de variables complexes dont le premier volume seulement a paru. Ce volume renferme une Introduction historique et critique d'un grand intérêt dont la lecture aura toujours un charme spécial.

On y découvre toute la puissance d'assimilation de son esprit, tout l'enthousiasme que les grands travaux d'Abel, de Jacobi, de Cauchy, de Riemann et de Weierstrass avaient fait naître en lui. Et la conception nette de leurs découvertes et l'enthousiasme pour leur génie se transmettent irrésistiblement au lecteur. C'est peut-être de là que vient le caractère suggestif du Livre.

Il a servi plus que tout autre travail à divulguer et à populariser en Italie les conceptions fondamentales de la théorie des fonctions,

Digitized by Google

parce que presque toutes les difficultés s'évanouissent en le lisant.

On ne saurait donc assez insister pour montrer le rôle qu'il a joué en Italie.

Combien de jeunes mathématiciens, chez nous, ont été enflammés par la lecture de ce Livre, et ont été poussés par Casorati vers l'idéal le plus élevé de la Science!

Et à ce propos je vais noter une chose qu'il serait impossible de passer sous silence.

Il y a en Italie une école de géomètres dont l'originalité, la profondeur, l'ampleur des vues, la variété des résultats acquis à la Science, ont mérité tous les éloges.

Cette école a toujours préféré les méthodes synthétiques aux méthodes analytiques, c'est pourquoi un esprit superficiel pourrait croire qu'elle s'est développée à part sans ressentir l'influence d'autres écoles ni des pensées qui se rattachent aux questions d'Analyse. Cela n'est pas exact, et celui qui s'occupera un jour de l'histoire des Mathématiques en Italie dans notre siècle, ne devra pas négliger l'influence que les analystes et les géomètres purs ont exercée les uns sur les autres.

Influence profonde qui se révèle de jour en jour plus grande ! Pour la montrer par un seul des traits qui la caractérisent, il me suffira de rappeler que les idées de Riemann ont joué un rôle fondamental dans les travaux des géomètres italiens. Or, si Betti a introduit chez nous ces idées, on doit au Livre de Casorati d'avoir pénétré partout et en particulier d'avoir attiré l'attention de nos géomètres purs.

C'est donc dans un cercle bien plus large et qu'on n'aurait pas même pu soupçonner au premier abord que cet Ouvrage a étendu son influence.

Si ce Livre révèle dans son Auteur des qualités d'écrivain de premier ordre, un ensemble de publications qui se rattachent à une idée que Casorati n'a jamais abandonnée, et sur laquelle il n'a pas cessé de revenir jusqu'à ses derniers jours, montre sa profondeur et son originalité.

Frappé par la proposition de Jacobi sur l'impossibilité des fonc-

Digitized by Google

tions à trois périodes distinctes, il tâche d'en construire avec un nombre quelconque de périodes en envisageant des fonctions à un nombre infini de valeurs.

C'est par là qu'il cherche à obtenir l'inversion directe des intégrales abéliennes.

Malheureusement cette tâche n'a pas été accomplie et il s'est limité aux études préliminaires sur les surfaces de Riemann avec un nombre infini de feuillets et sur leur connexion.

Nous espérons que ces études préparatoires ne seront pas perdues.

Il serait impossible de suivre Casorati dans les nombreuses questions qu'il a traitées en des Notes qui se succédèrent pendant toute sa vie. Il nous suffit de remarquer que presque toutes les questions vitales de la théorie des fonctions ont été abordées ou perfectionnées par lui et que nul point de son œuvre scientifique ne doit être négligé.

Si ce qui précède permet de concevoir les rapports mutuels des trois géomètres dont nous avons parlé, nous n'avons pu donner une idée exacte de la place absolue que chacun d'eux a dans le monde savant et dans l'histoire de la Science. Les travaux de Brioschi en Algèbre et en Mécanique; ceux de Betti en Algèbre et en Physique mathématique; ceux de Casorati sur les équations différentielles, sortent, en effet, du cadre dans lequel nous sommes resté jusqu'à présent; mais ce sont toujours les caractères que nous avons reconnus qui dominent ces Ouvrages.

Nous voyons, en effet, Betti être un des premiers qui aient compris, développé et systématisé les idées nouvelles de Galois, ces idées qui ont transformé l'Algèbre et sont en train de transformer l'Analyse.

Nous le voyons aussi donner pour la première fois une méthode générale pour l'intégration des équations de l'élasticité, et bien des questions particulières de Mécanique fécondées par son esprit puissant conduisent à des théories générales et à des vues nouvelles sur la conception philosophique des phénomènes de la nature.

Brioschi commence sa longue carrière par l'étude d'une question

Digitized by Google

de la théorie de la chaleur; il publie ensuite son célèbre *Traité sur les déterminants*. On lui est redevable d'avoir développé les théories des invariants et des covariants des formes algébriques en faisant des applications très variées de ces théories générales.

Il comprend l'importance du Mémoire de Gauss sur la théorie des surfaces, à une époque où ce Travail était encore négligé, et il s'occupe des théories modernes de la Géométrie.

Dans la Mécanique, il étudie les questions de statique, il s'occupe de l'intégration des équations différentielles par la méthode de Jacobi, et consacre à l'équilibre et au mouvement des fluides des travaux devenus classiques.

Mais son penchant naturel vers les calculs et sa disposition à perfectionner des théories connues se montrent toujours soit par les méthodes qu'il préfère, soit par les questions particulières et par les applications auxquelles il donne le plus grand prix et dont il fait le plus grand cas.

Nous voyons enfin Casorati, par une simple interprétation du calcul des différences finies, donner une théorie nouvelle des équations différentielles linéaires, théorie qui relie ensemble et met dans leur vrai jour bien des faits qui ne paraissaient pas avoir de rapports entre eux.

Il approfondit l'étude des équations différentielles algébriques et consacre aux formes différentielles, à la Géométrie analytique et à la Géométrie infinitésimale des articles qui ont fait beaucoup de bruit et excité beaucoup d'intérêt et où il aborde des questions vitales dans l'enseignement de l'Analyse.

Mais l'on ne pourrait pas terminer ce rapide aperçu sur tant de travaux, sans parler d'un problème célèbre où Betti et Brioschi ont acquis une renommée dès leur jeune âge, en montrant au monde mathématique tout leur talent.

J'entends parler de la résolution de l'équation du cinquième degré.

A ce souvenir, notre pensée se tourne naturellement vers le glorieux vieillard, honneur de la France et de notre siècle, auquel du

Digitized by Google

profond de notre âme, avec des sentiments de respect, d'admiration et de gratitude, nous envoyons un salut, qui réunit, j'en suis sûr, dans un élan unique, le cœur de tous les mathématiciens qui se trouvent ici.

Il a acquis une gloire immortelle par la résolution de ce problème, et son nom gardera sa célébrité dans les siècles qui viendront.

Autour de la figure de M. Hermite qui se dresse au premier plan, on peut grouper trois mathématiciens : Betti, Brioschi et Kronecker.

Le premier a été un précurseur qui a poussé bien loin ses recherches, mais qui, faute d'un pas à faire, n'a pas atteint le but.

Brioschi, peu après la découverte de M. Hermite et en même temps que Kronecker, a apporté une telle lumière dans la question qu'elle en a été presque renouvelée.

On voit poindre à cet instant de leur carrière ces différences des caractères de Betti et de Brioschi qui devaient jouer un si grand rôle dans toute leur vie scientifique. On voit dans tout leur jour la tendance de Betti à aborder des questions nouvelles, et la faculté de Brioschi de les perfectionner.

Et c'est par là que je terminerai.

Je terminerai en associant les noms de Betti et de Brioschi si chers à l'Italie au nom de M. Hermite si cher à la France.

Ma pensée revient à l'épisode par lequel j'ai commencé : au voyage de 1858, cette mémorable année où les grandes découvertes dont nous venons de parler ont été enfantées et qui marque le commencement de la tendre amitié entre les savants qui venaient d'Italie et celui qu'ils allaient chercher en France, amitié qui a duré quarante ans et qui a été toujours raffermie par le même dévouement à la Science, par la même confiance dans les hautes destinées de l'Humanité.

Que cette noble amitié soit le symbole des liaisons de fraternité qui réunissent les deux pays!

Digitized by Google

SUR LES

PROBLÈMES FUTURS DES MATHÉMATIQUES,

PAR M. DAVID HILBERT (Göttingen),

TRADUITE PAR M. L. LAUGEL (1).

Qui ne soulèverait volontiers le voile qui nous cache l'avenir afin de jeter un coup d'œil sur les progrès de notre Science et les secrets de son développement ultérieur durant les siècles futurs? Dans ce champ si fécond et si vaste de la Science mathématique, quels seront les buts particuliers que tenteront d'atteindre les guides de la pensée mathématique des générations futures? Quelles seront, dans ce champ, les nouvelles vérités et les nouvelles méthodes découvertes par le siècle qui commence?

L'histoire enseigne la continuité du développement de la Science. Nous savons que chaque époque a ses problèmes que l'époque suivante résout, ou laisse de côté comme stériles, en les remplaçant par d'autres. Si nous désirons nous figurer le développement présumable de la Science mathématique dans un avenir prochain, nous devons repasser dans notre esprit les questions pendantes et porter notre attention sur les problèmes posés actuellement et dont nous attendons de l'avenir la résolution. Le moment présent, au seuil du vingtième siècle, me semble bien choisi pour passer en revue ces problèmes; en effet, les grandes divisions du

(1) L'original de la traduction a paru en allemand dans les *Göttinger Nachrichten*, 1900. M. Hilbert a fait ici quelques modifications à l'original au § 13 et quelques additions au § 14 et au § 23. (L. L.)

Digitized by Google

temps non seulement permettent de jeter un regard sur le passé, mais encore attirent notre pensée sur l'avenir inconnu.

Le grand rôle joué par des problèmes déterminés dans le progrès général de la Science mathématique est non moins incontestable que l'influence qu'ont ces problèmes sur le travail particulier du chercheur. Tant qu'une branche de la Science jouit d'une abondance de problèmes, elle est pleine de vie; le manque de problèmes dénote la mort, ou la cessation du développement propre de cette branche. Et de même que dans toute entreprise humaine il faut poursuivre un but, de même dans la recherche mathématique il faut des problèmes. La puissance du chercheur se retrempe dans leur résolution, il y trouve de nouvelles méthodes et de nouveaux points de vue, d'où il découvre un horizon plus vaste et plus libre.

Il est difficile et souvent impossible de préjuger exactement de la valeur d'un problème; c'est, en effet, exclusivement le profit que tire la Science de la solution du problème qui permet de porter un jugement sur la valeur de ce dernier. On peut néanmoins se demander s'il n'existe pas des attributs généraux caractérisant un bon problème mathématique.

Un mathématicien français des temps passés a dit : « Une théorie mathématique ne doit être regardée comme parfaite que si elle a été rendue tellement claire qu'on puisse la faire comprendre au premier individu rencontré dans la rue. » Cette clarté, cette limpidité si énergiquement exigée ici d'une théorie mathématique, je l'exigerais encore davantage d'un problème mathématique parfait; ce qui est clair et limpide nous attire en effet, ce qui est embrouillé nous rebute.

Pour avoir de l'attrait, un problème mathématique doit être difficile, mais non pas inabordable, sinon il se rit de nos efforts; il doit au contraire être un véritable fil conducteur à travers les dédales du labyrinthe vers les vérités cachées, et nous récompenser de nos efforts par la joie que nous procure la découverte de la solution.

Les mathématiciens des siècles précédents s'occupaient avec ardeur de la recherche des solutions de quelques problèmes très diffi-

Digitized by Google

ciles. Ils en appréciaient la valeur à son juste prix. Je me contenterai de citer le *Problème de la brachistochrone* de Jean Bernoulli. L'expérience démontre, c'est ainsi que s'exprime Bernoulli, en proposant ce problème au public, que les nobles esprits ne sont jamais davantage incités au travail pour faire progresser la Science que lorsqu'on leur propose des problèmes difficiles autant qu'utiles; il espère mériter la reconnaissance du monde mathématique, si, à l'exemple de savants comme Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani et autres, qui l'ont fait avant lui, il pose un problème aux analystes les plus distingués de son temps, afin qu'ils puissent, comme avec la pierre de touche, essayer l'excellence de leurs méthodes et en même temps mesurer leurs forces entre elles. C'est de ce problème de Bernoulli et de problèmes analogues que le calcul des variations tire son origine.

On sait que Fermat annonça que l'équation de Diophante

$$x^n + y^n = z^n$$

(sauf en certains cas qui sautent aux yeux) est impossible à résoudre en nombres entiers, x, y, z. Le *Problème de la démonstration de cette impossibilité* nous offre un exemple frappant de l'influence que peut avoir sur la Science une question très spéciale et en apparence peu importante. C'est, en effet, le problème de Fermat qui conduisit Kummer à l'introduction des nombres idéaux et à la découverte du théorème de la décomposition univoque des nombres d'un corps du cercle [1] en facteurs premiers idéaux, théorème qui, par l'extension qu'en ont faite Dedekind et Kronecker aux domaines algébriques quelconques, est devenu le point central de la théorie moderne des nombres et qui a une importance s'étendant bien au delà des limites de cette théorie, jusque dans les régions de l'Algèbre et de la Théorie des fonctions.

---

[1] En allemand *Kreiskörper*. C'est un corps déterminé par les racines de l'unité d'un degré quelconque déterminé. On trouvera les plus récents développements de ces diverses théories dans le compte rendu : *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, par M. Hilbert (*Jahresbericht der D. M. V.*, t. IV; 1894-1895. Berlin, Reimer; 1897, p. 174-542). (L. L.)

Digitized by Google

Passant à un tout autre champ d'études, je citerai le *Problème des trois corps*.

M. Poincaré, en entreprenant de traiter à nouveau ce difficile problème et d'en avancer la solution, a découvert des méthodes fécondes et d'une grande portée en Mécanique céleste, qui sont aujourd'hui admises et appliquées même par l'astronome pratique.

Ces deux problèmes, celui de Fermat et celui des trois corps, nous semblent occuper comme les pôles opposés dans l'ensemble des problèmes; le premier, libre création de la raison pure, le second, posé par les astronomes et indispensable pour la connaissance des phénomènes fondamentaux les plus simples de la nature.

Il arrive souvent aussi qu'un certain problème particulier se rattache aux branches les plus diverses de la Science mathématique. C'est ainsi que le *Problème des lignes géodésiques* joue un rôle des plus importants au point de vue de l'histoire ainsi que des principes, dans les fondements de la Géométrie, dans la théorie des courbes et des surfaces, dans la Mécanique, et enfin dans le Calcul des variations. Dans son livre sur l'*Icosaèdre*, M. F. Klein a, de même, très bien fait ressortir l'influence du rôle que joue le *Problème des polyèdres réguliers* dans la Géométrie élémentaire, dans la théorie des groupes et des équations, et dans la théorie des équations différentielles linéaires.

Pour mettre encore en pleine lumière l'importance de certains problèmes, je rappellerai que Weierstrass regardait comme une bienveillante disposition de la Providence d'avoir, au début de sa carrière, rencontré un problème fondamental auquel il pût s'attaquer, tel que le *Problème d'inversion de Jacobi*.

Ayant exposé l'importance générale des problèmes en Mathématiques, je passe à la question de savoir quelles sont les sources où le mathématicien les puise. Les premiers et les plus anciens problèmes de chaque branche de la Science mathématique tirent certainement leur origine de l'expérience, et c'est le monde de la connaissance extérieure qui les inspire. Les règles des *opérations sur les nombres entiers* ont été certainement découvertes lors d'un état infé-

Digitized by Google

rieur de culture de l'humanité, absolument comme, aujourd'hui encore, l'enfant apprend à appliquer ces règles par la méthode empirique. Il en est de même des *premiers problèmes de la Géométrie :* problèmes posés dans l'antiquité, la duplication du cube, la quadrature du cercle, et ces problèmes qui se sont présentés les premiers dans les théories de la résolution des équations numériques, des courbes, du Calcul différentiel et intégral, du Calcul des variations, de la série de Fourier et du potentiel ; sans parler de cette abondance et de cette richesse de problèmes proprement dits de la Mécanique, de l'Astronomie et de la Physique.

Mais, dans le développement progressif d'une discipline mathématique, l'esprit humain, encouragé par la découverte des solutions, a conscience de son indépendance; il crée lui-même des problèmes nouveaux et féconds de la façon la plus heureuse, sans impulsion extérieure apparente et uniquement par combinaison logique, par généralisation et particularisation, par séparation et réunion des idées. C'est alors lui qui, placé au premier plan, pose essentiellement les questions.

C'est ainsi qu'ont pris naissance le *Problème des nombres premiers* et les autres problèmes de l'Arithmétique, la théorie de Galois, des équations, la théorie des invariants algébriques, celle des fonctions abéliennes et automorphes; c'est enfin là, d'une manière générale, l'origine de presque *toutes les questions les plus délicates des théories modernes des nombres et des fonctions.*

D'ailleurs, tandis que travaille le pouvoir créateur de la raison pure, le monde extérieur fait de nouveau sentir son influence ; il nous conduit, par les faits extérieurs, à de nouvelles questions, il nous ouvre de nouvelles régions de la Science mathématique; alors, en nous efforçant de faire rentrer ces nouveaux domaines de la Science dans le royaume de la raison pure, nous rencontrons souvent la réponse à d'anciens problèmes non résolus et nous faisons avancer les anciennes théories de la manière la plus avantageuse. Ce sont, ce me semble, sur ces échanges répétés entre la raison et l'expérience que reposent tant d'étonnantes analogies, ainsi que

Digitized by Google

cette harmonie, en apparence préétablie, si souvent remarquée par le mathématicien dans les questions, les méthodes et les conceptions des divers domaines de sa Science.

Examinons encore rapidement les exigences et les conditions générales auxquelles doit répondre la solution d'un problème mathématique. Avant tout, je placerai l'exactitude de la solution qui doit être obtenue au moyen d'un nombre fini de conclusions et qui doit reposer sur un nombre fini d'hypothèses fournies par le problème même et formulées dans chaque cas avec précision. Or, cette condition de la déduction logique au moyen d'un nombre fini de conclusions n'est pas autre chose que celle de la rigueur dans les démonstrations. En effet, la rigueur dans la démonstration, condition aujourd'hui en Mathématiques d'une importance proverbiale, correspond à un besoin philosophique général de notre entendement; d'autre part, c'est seulement en satisfaisant à cette exigence que les problèmes manifestent complètement leur fécondité et leur portée. Un nouveau problème, lorsqu'il tire son origine du monde extérieur, est comme un sauvageon qui ne se développe et ne porte des fruits que lorsqu'il a été greffé avec tous les soins de l'art du jardinier sur la souche mère, c'est-à-dire sur les connaissances mathématiques que nous possédons complètement.

Ce serait, du reste, une erreur de croire que la rigueur dans la démonstration est ennemie de la simplicité. De nombreux exemples, au contraire, montrent que la méthode la plus rigoureuse est aussi la plus simple et la plus facile à saisir. La recherche de la rigueur nous conduit toujours à découvrir des raisonnements plus simples, elle nous ouvre aussi la voie à des méthodes plus fécondes que les anciennes qui étaient moins rigoureuses. Ainsi la Théorie des courbes algébriques a éprouvé des simplifications incontestables et a beaucoup gagné en unité depuis l'emploi des méthodes rigoureuses de la théorie des fonctions et depuis l'introduction des considérations transcendantes auxiliaires. De même la démonstration que les séries de puissances admettent l'application des quatre opérations élémentaires de l'Arithmétique et peuvent être différentiées ou

Digitized by Google

intégrées terme par terme, a simplifié l'Analyse tout entière. Il en est ainsi tout particulièrement des théories de l'élimination et des équations différentielles, ainsi que des démonstrations d'existence exigées dans la dernière de ces théories. Mais, à mon avis, l'exemple le plus frappant dans cet ordre d'idées est celui du Calcul des variations. Le traitement de la variation première et de la variation seconde des intégrales définies exigeait certains calculs extrêmement compliqués et les développements des anciens mathématiciens manquaient sur ce sujet de la rigueur nécessaire. C'est Weierstrass qui, le premier, nous a montré un chemin conduisant à une nouvelle fondation bien assurée du Calcul des variations. A la fin de la Conférence actuelle, j'indiquerai rapidement, en prenant comme exemple l'intégrale simple et l'intégrale double, comment, en suivant la voie ouverte par Weierstrass, on simplifie d'une manière étonnante le Calcul des variations; je ferai voir que, dans la démonstration des critères nécessaires et suffisants pour l'existence d'un maximum ou minimum, le calcul de la variation seconde et une partie des fatigants raisonnements relatifs à la variation première sont absolument superflus, sans parler du progrès considérable apporté par la disparition de la restriction à des variations telles que les dérivées des fonctions ne varient que de peu.

Mais si je place avant tout la rigueur dans le raisonnement comme condition nécessaire à la solution complète d'un problème, je n'en élèverai pas moins la voix contre cette opinion que ce ne sont que les questions de l'Analyse ou même de l'Arithmétique qui soient seules susceptibles d'un traitement parfaitement rigoureux. Cette opinion émise de temps à autre par des autorités scientifiques, je la regarde comme absolument erronée.

Une notion si étroite de la condition de rigueur conduirait rapidement à ignorer toutes les conceptions tirées de la Géométrie, de la Mécanique et de la Physique; elle barrerait le cours de tout ce qui découle du monde extérieur et, comme dernière conséquence, elle mènerait enfin au rejet des concepts du continu et du nombre irrationnel. Aussi quelle source de vie verrions-nous alors extirpée

Digitized by Google

des Mathématiques par la suppression de la Géométrie et de la Physique mathématique! Tout au contraire, je pense que partout où se présentent des idées mathématiques, soit en Philosophie (théorie de l'entendement), soit en Géométrie, soit en Physique, le problème se pose de la discussion des principes fondamentaux, bases de ces idées, et de l'établissement d'un système simple et complet d'axiomes; et cela doit se faire de telle façon que la rigueur des nouvelles définitions et leur applicabilité ne le cèdent en rien aux anciennes définitions arithmétiques.

A de nouvelles idées correspondent nécessairement de nouveaux symboles; nous devons choisir ces derniers de manière qu'ils nous rappellent les phénomènes qui ont été l'origine des nouvelles idées. Ainsi les figures de la Géométrie sont des symboles qui nous rappellent l'intuition de l'espace, et c'est ainsi que tout mathématicien les emploie. En même temps que de la double inégalité $a > b > c$, entre trois quantités a, b, c, qui ne se sert du dessin de trois points situés l'un à la suite de l'autre sur une droite comme symbole géométrique traduisant le mot *entre*? Lorsqu'il s'agit de démontrer rigoureusement un théorème difficile sur la continuité des fonctions ou sur l'existence de points de condensation, qui de nous ne fait usage du dessin des segments de droites et de rectangles compris les uns dans les autres? Comment se passerait-on de la figure du triangle, du cercle avec son centre, ou de la figure formée par trois axes rectangulaires? Et qui donc renoncerait à la représentation des vecteurs, aux dessins de familles de courbes et de surfaces avec leurs enveloppes, images qui jouent un rôle d'une si grande importance dans la Géométrie infinitésimale, dans la fondation du Calcul des variations, ainsi que dans d'autres branches des Mathématiques pures?

Les signes et symboles de l'Arithmétique sont des figures écrites, et les formules géométriques sont des formules dessinées; aucun mathématicien ne pourrait se passer de ces formules dessinées, pas plus qu'il ne pourrait, dans les calculs, se passer de parenthèses ou crochets ou autres signes analytiques.

Digitized by Google

L'application des symboles géométriques comme méthode rigoureuse de démonstration présuppose la connaissance exacte des axiomes qui sont la base de ces figures, et la possession complète de ces axiomes; pour que ces figures géométriques puissent être incorporées dans le trésor général des symboles mathématiques, une discussion axiomatique rigoureuse de leur contenu intuitif est de toute nécessité. De même que dans l'addition de deux nombres on ne doit pas poser les chiffres les uns sous les autres d'une façon inexacte, mais au contraire appliquer exactement les règles de calcul, c'est-à-dire les axiomes de l'Arithmétique, de même les opérations sur les symboles géométriques doivent être déterminées au moyen des axiomes de la Géométrie et de leur association.

La coïncidence entre la pensée géométrique et la pensée arithmétique se révèle encore en ceci : dans les recherches arithmétiques, de même que dans les considérations géométriques, nous ne remontons pas à chaque instant la chaîne des déductions jusqu'aux axiomes; au contraire, lorsque pour la première fois nous attaquons un problème en Arithmétique, exactement comme en Géométrie, nous employons d'abord une combinaison de raisonnements, rapide, inconsciente, non encore définitive, avec une confiance absolue en un certain sentiment arithmétique et en l'efficacité des symboles arithmétiques; sans cette confiance nous ne pourrions pas plus progresser en Arithmétique que nous ne le pourrions en Géométrie sans la faculté de voir dans l'espace. Comme modèle d'une théorie arithmétique, opérant d'une manière rigoureuse avec les concepts et les symboles de la Géométrie, je citerai l'ouvrage de M. Minkowski : *Geometrie der Zahlen* (1).

Ici se placent tout naturellement quelques remarques sur les difficultés que peuvent présenter les problèmes mathématiques et sur la manière de les surmonter.

Si nous ne pouvons parvenir à résoudre un problème mathématique, la raison en est souvent que nous n'avons pas encore atteint

(1) Leipzig, Teubner, 1er fasc.; 1896.

Digitized by Google

le point de vue plus général d'où ce problème ne semble plus qu'un anneau d'une chaîne de problèmes de même nature. Mais une fois que nous avons atteint ce point de vue, non seulement le problème devient plus abordable, mais encore nous sommes mis en possession d'une méthode applicable aux problèmes de même espèce. Je citerai comme exemple, dans la théorie des intégrales définies, l'introduction par Cauchy des chemins complexes d'intégration et, dans la théorie des nombres, l'introduction par Kummer de la notion des nombres idéaux. Cette façon d'arriver aux méthodes les plus générales est sans aucun doute la plus accessible et la plus sûre. En effet, celui qui chercherait des méthodes sans avoir devant les yeux un problème déterminé, chercherait le plus souvent en vain.

D'autre part, à mon avis du moins, la particularisation joue, dans les problèmes mathématiques, un rôle plus important que la généralisation. Quand nous cherchons en vain la réponse à une question, l'insuccès, la plupart du temps, tient peut-être à ce que nous n'avons pas encore résolu ou à ce que nous avons résolu seulement d'une manière incomplète des problèmes plus simples que celui en question. Tout revient alors à trouver ces problèmes plus simples et à en obtenir la solution, à l'aide de moyens auxiliaires aussi complets que possible et à l'aide de concepts susceptibles de généralisation. Cette manière de procéder est comme un levier des plus puissants propre à lever les difficultés mathématiques, et c'est de ce levier, ce me semble, que l'on se sert, même inconsciemment, la plupart du temps.

Il se peut aussi que l'on s'efforce d'obtenir une solution en se basant sur des hypothèses insuffisantes ou mal comprises et que, par suite, on ne puisse atteindre le but. Il s'agit alors de démontrer l'impossibilité de résoudre le problème en se servant d'hypothèses telles qu'elles ont été données ou interprétées. Les anciens nous ont donné les premiers exemples de pareilles démonstrations d'impossibilité ; ils ont démontré ainsi que dans un triangle rectangle isoscèle l'hypoténuse et le côté de l'angle droit sont dans un rapport irra-

Digitized by Google

tionnel. Dans la Mathématique moderne, la question de l'impossibilité de certaines solutions joue un rôle prépondérant; c'est à ce point de vue de la démonstration de l'impossibilité que d'anciens et difficiles problèmes, tels que ceux de la démonstration de l'axiome des parallèles, de la quadrature du cercle et de la résolution par radicaux de l'équation du cinquième degré, ont reçu une solution parfaitement satisfaisante et rigoureuse, bien qu'en un sens tout différent de celui qu'on cherchait primitivement.

Le fait remarquable dont nous venons de parler et certains raisonnements philosophiques ont fait naître en nous la conviction que partagera certainement tout mathématicien, mais que jusqu'ici personne n'a étayée d'aucune preuve, la conviction, dis-je, que tout problème mathématique déterminé doit être forcément susceptible d'une solution rigoureuse, que ce soit par une réponse directe à la question posée, ou bien par la démonstration de l'impossibilité de la résolution, c'est-à-dire la nécessité de l'insuccès de toute tentative de résolution. Proposons-nous un problème déterminé non encore résolu : par exemple, posons-nous la question de l'irrationnalité de la constante C d'Euler ou de Mascheroni, ou encore la question de savoir s'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $2^n + 1$. Quelque inabordables que semblent ces problèmes, et quelque désarmés que nous soyons encore vis-à-vis d'eux aujourd'hui, nous n'en avons pas moins la conviction intime que l'on doit pouvoir les résoudre au moyen d'un nombre fini de déductions logiques.

Cet axiome de la possibilité de résoudre tout problème, est-ce une propriété caractéristique et distinctive de la pensée mathématique, ou serait-ce peut-être une loi générale du mode d'existence de notre entendement, à savoir que toutes les questions que se pose notre entendement soient susceptibles d'être résolues par lui? On rencontre d'ailleurs aussi dans d'autres sciences d'antiques problèmes qui ont été, de la manière la plus satisfaisante, finalement résolus par la démonstration de leur impossibilité et qui n'en ont pas moins été de la plus haute utilité pour le développement de la Science. Je rappellerai le problème du mouvement perpétuel. Après

Digitized by Google

tant d'essais infructueux pour construire un mécanisme réalisant le mouvement perpétuel, on en vint à chercher les relations qui doivent avoir lieu entre les forces de la nature pour qu'un mouvement perpétuel soit impossible ([1]); ce problème inverse conduisit à la découverte du principe de la conservation de l'énergie, principe qui, de son côté, explique l'impossibilité du mouvement perpétuel au sens primitivement requis.

Cette conviction de la possibilité de résoudre tout problème mathématique est pour nous un précieux encouragement pendant le travail. Nous entendons toujours résonner en nous cet appel : *Voilà le problème, cherches-en la solution. Tu peux la trouver par le pur raisonnement. Jamais, en effet, mathématicien ne sera réduit à dire : « Ignorabimus »*.

Inépuisable est la multitude des problèmes de la Mathématique; dès qu'une question est résolue, à sa place s'en présente une foule d'autres.

Dans ce qui suit je vais tenter, et cela comme preuve à l'appui de mes dires précédents, de proposer quelques problèmes déterminés pris dans diverses branches des Mathématiques, et dont l'étude pourrait concourir à l'avancement de la Science.

Jetons un regard sur les principes de l'Analyse et de la Géométrie. Les événements les plus suggestifs et les plus importants qui ont eu lieu dans ces domaines durant le dix-neuvième siècle sont, ce me semble, la conception arithmétique de la notion du continu que l'on trouve dans les travaux de Cauchy, Bolzano et Cantor, ainsi que la découverte de la Géométrie non euclidienne par Gauss, Bolyai, Lobatchefskij.

J'attirerai donc en premier lieu votre attention sur quelques problèmes appartenant à ces domaines.

([1]) *Comparez* HELMHOLTZ : *Ueber die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittelungen der Physik*, Vortrag gehalten in Königsberg; 1854.

Digitized by Google

I. — Problème de M. Cantor relatif à la puissance du continu.

Deux systèmes, c'est-à-dire deux ensembles, de nombres réels ordinaires (ou de points) sont, d'après M. Cantor, dits *équivalents* ou *de même puissance,* lorsque l'on peut établir entre eux une relation telle qu'à chaque nombre de l'un des ensembles corresponde un nombre déterminé et un seul de l'autre. Les recherches de M. Cantor sur de tels ensembles rendent très probable l'exactitude d'un théorème qui, jusqu'ici, malgré les plus grands efforts, n'a pu être démontré par personne. Ce théorème est le suivant : Tout système de nombres réels en nombre infini, c'est-à-dire tout ensemble infini de nombres (ou de points), ou bien est équivalent à l'ensemble de tous les nombres entiers naturels 1, 2, 3, ..., ou bien est équivalent à l'ensemble de tous les nombres réels, et par conséquent au continu, c'est-à-dire aux points d'un segment; *au point de vue de l'équivalence, il n'y aurait donc que deux ensembles de nombres : l'ensemble dénombrable et le continu.*

De ce théorème résulterait également que le continu formerait la puissance immédiatement supérieure à la puissance des ensembles dénombrables. La démonstration de ce théorème serait alors comme un nouveau pont jeté entre les ensembles dénombrables et le continu.

Citons encore une très remarquable affirmation de M. Cantor, qui a un rapport des plus intimes avec le théorème précédent et qui en serait peut-être la clef de la démonstration. Un système quelconque de nombres réels est dit *ordonné* lorsque de deux nombres quelconques du système on a convenu lequel est le précédent et lequel est le suivant; de plus cette convention doit être telle que, un nombre a précédant un nombre b, et le nombre b précédant à son tour un nombre c, l'on devra regarder a comme précédant c. L'ordre dit *naturel* des nombres d'un système est celui où l'on regarde un plus petit nombre comme précédant un plus grand qui sera de son côté regardé comme suivant le premier. Il y a, c'est

Digitized by Google

facile à voir, une infinité d'autres manières d'ordonner les nombres d'un système.

Maintenant, si nous considérons un ordre déterminé de nombres et si parmi ceux-ci nous mettons à part un système particulier de nombres, ce que l'on nomme un *système* ou *ensemble partiel*, cet ensemble partiel sera également ordonné. Or, M. Cantor considère une espèce particulière d'ensembles ordonnés qu'il nomme ensembles *bien ordonnés;* ce qui caractérise ces ensembles bien ordonnés, c'est qu'il existe non seulement dans l'ensemble même, mais encore dans tout ensemble partiel, un nombre qui précède tous les autres. Le système des nombres entiers 1, 2, 3, ..., dans son ordre naturel, est évidemment un ensemble bien ordonné. Au contraire, l'ensemble de tous les nombres réels, c'est-à-dire le continu, dans l'ordre naturel, n'est pas un ensemble bien ordonné. En effet, considérons l'ensemble partiel formé par les points d'un segment où l'on a fait abstraction du point initial; il est clair que cet ensemble partiel ne possède jamais aucun élément précédant tous les autres. Il se présente alors cette question : L'ensemble de tous les nombres ne pourrait-il être ordonné d'une autre manière telle que tout ensemble partiel eût un élément précédant tous les autres? Autrement dit, le continu peut-il être conçu comme ensemble bien ordonné? A cette question, M. Cantor croit que l'on peut répondre par l'affirmative. Il me semble extrêmement désirable *d'obtenir une démonstration directe de cette remarquable affirmation de M. Cantor*, en assignant par exemple effectivement un ordre des nombres tel que dans tout ensemble partiel on puisse assigner un nombre précédant tous les autres.

II. — De la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique.

Lorsqu'il s'agit de poser les principes fondamentaux d'une science, l'on doit établir un système d'axiomes renfermant une description complète et exacte des relations entre les concepts élémentaires de cette science. Ces axiomes sont en même temps les définitions de

Digitized by Google

ces concepts élémentaires; aucune affirmation relative à la science dont nous examinons les principes fondamentaux ne sera admise comme exacte, à moins qu'on ne puisse la tirer des axiomes au moyen d'un nombre fini de déductions. Si l'on considère les choses plus exactement, la question suivante se pose : *Certaines affirmations contenues dans des axiomes ne sont-elles pas dépendantes les unes des autres, et, par suite, ces axiomes ne renferment-ils pas des parties communes superflues que l'on doit supprimer si l'on veut obtenir un système d'axiomes complètement indépendants?*

Mais avant tout, parmi tant de questions soulevées par l'examen des axiomes, je regarde comme la plus importante celle-ci : *Démontrer que les axiomes ne sont pas contradictoires; c'est-à-dire démontrer qu'en se basant sur les axiomes l'on ne pourra jamais arriver à des résultats contradictoires au moyen d'un nombre fini de déductions logiques.*

En Géométrie on démontre la non-contradiction des axiomes en construisant un domaine convenable de nombres tel qu'aux axiomes géométriques correspondent des relations analogues entre les nombres de ce domaine et tel, par conséquent, que toute contradiction dans les conclusions tirées des axiomes géométriques serait forcément reconnaissable dans l'arithmétique de ce domaine. De cette façon la non-contradiction des axiomes géométriques est ramenée à la démonstration de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique.

Quant à la démonstration de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique, elle demande à être effectuée par voie directe.

Les axiomes de l'Arithmétique ne sont pas essentiellement autre chose que les règles ordinaires du calcul auxquelles il faut ajouter l'axiome de continuité. Il n'y a pas longtemps, j'ai énuméré ces axiomes dans une courte Note [1]; en même temps j'y ai remplacé l'axiome de la continuité par deux autres plus simples, à savoir :

---

[1] *Jahresbericht der D. M. V.*, t. VIII, p. 180; 1900.

Digitized by Google

l'axiome connu d'Archimède, et un nouvel axiome énonçant que les nombres forment un système d'êtres qui n'est susceptible d'aucune extension, si l'on conserve intacts tous les autres axiomes (axiome d'intégrité) (1). Or je suis persuadé que l'on peut trouver une démonstration directe de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique en appliquant à ce but les méthodes de raisonnement connues dont on se sert dans la théorie des nombres irrationnels, après les avoir remaniées en leur faisant subir des modifications convenables.

Pour caractériser encore à un autre égard l'importance du problème, je ferai la remarque suivante : si l'on confère à quelque notion des attributs qui se contredisent, je dirai que, au point de vue mathématique, cette notion n'existe pas. Par exemple, en Mathématiques, il n'existe aucun nombre réel dont le carré soit égal à -1. Si l'on peut, au contraire, démontrer que les attributs conférés à une notion ne peuvent jamais, par l'application d'un nombre fini de déductions logiques, conduire à une contradiction, je dirai que l'on a ainsi démontré l'existence mathématique de la notion en question, par exemple l'existence d'un nombre ou d'une fonction remplissant certaines conditions. Dans le cas actuel où il s'agit des axiomes relatifs aux nombres réels de l'Arithmétique, la démonstration de la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique serait en même temps la démonstration de l'existence mathématique de l'ensemble de tous les nombres réels, c'est-à-dire du continu. De la sorte, si l'on obtenait une démonstration complète de la non-contradiction des axiomes, les objections qui ont été soulevées de temps à autre contre l'existence de la conception des nombres réels n'auraient aucune raison d'être. A vrai dire, l'ensemble de tous les nombres réels, c'est-à-dire le continu, envisagé comme nous le faisons ici, n'est pas, à proprement parler, la totalité de tous les développements possibles en fractions décimales ou

(1) *Comparer* une Note inédite écrite par M. Hilbert pour la traduction de sa *Festschrift : Grundlagen der Geometrie* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XVII, p. 123; 1900). (L. L.)

Digitized by Google

l'ensemble de toutes les lois possibles suivant lesquelles peuvent procéder les éléments d'une série fondamentale : c'est plutôt un système d'êtres dont les relations mutuelles sont régies par les axiomes établis et pour lesquels sont vrais tous les faits, et ceux-là seuls, que l'on peut déduire de ces axiomes au moyen d'un nombre fini de déductions logiques. Ce n'est qu'en ce sens, selon moi, que la notion du continu est rigoureusement et logiquement concevable; et il me semble effectivement que c'est ainsi que ce concept correspond le mieux à ce que nous donnent l'expérience et l'intuition. La notion du continu, et même celle de l'ensemble de toutes les fonctions, existe alors absolument au même sens qu'existe, par exemple, le système de tous les nombres rationnels, ou encore les classes de nombres et les puissances plus élevées de M. Cantor. Je suis, en effet, convaincu que l'existence de ces dernières conceptions, au sens que je viens d'indiquer, peut être tout aussi bien démontrée que l'existence du continu, tandis que c'est tout le contraire pour le système de toutes les puissances ou encore de tous les nombres aleph transfinis de M. Cantor, pour lequel on ne peut établir, au sens que j'ai indiqué, un système non contradictoire d'axiomes, et qui forment alors, par suite, une conception qui, suivant mon expression de tout à l'heure, n'a pas d'existence mathématique.

Dans le domaine des principes de la Géométrie, je citerai d'abord le problème suivant :

III. — De l'égalité en volume de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales.

Dans deux lettres adressées à Gerling, Gauss [1] exprime le regret que certains théorèmes de Stéréométrie dépendent de la méthode d'exhaustion ou, comme on dirait aujourd'hui, de l'*axiome de continuité* (ou de l'axiome d'Archimède). Gauss cite en particulier ce théorème d'Euclide, que deux pyramides triangulaires de

[1] Gauss, *Werke*, t. VIII, p. 241 et 244.

Digitized by Google

même hauteur sont entre elles comme leurs bases. Le problème analogue relatif au plan est aujourd'hui complètement résolu (1). Gerling (2) réussit à démontrer l'égalité des volumes de polyèdres symétriques en les décomposant en parties congruentes; mais la démonstration, par ce moyen, du théorème précité d'Euclide dans le cas général, ne me semble guère possible. Il s'agirait donc alors d'une démonstration rigoureuse de l'impossibilité du problème. On serait immédiatement en possession d'une telle démonstration du moment que l'on pourrait *assigner deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales qu'il serait impossible de décomposer en tétraèdres congruents, et qui ne pourraient non plus, par l'addition de tétraèdres congruents, être transformés en polyèdres, eux-mêmes décomposables en tétraèdres congruents.*

IV. — Problème de la ligne droite, plus court chemin d'un point à un autre.

C'est encore là un problème relatif aux principes fondamentaux de la Géométrie.

Si des axiomes nécessaires à l'édification de la Géométrie habituelle euclidienne, nous retranchons l'axiome des parallèles en supposant qu'il ne soit pas vérifié, mais que, au contraire, tous les autres le soient, nous obtenons, comme on le sait, la Géométrie (hyperbolique) de Lobatchefskij. En ce sens, nous pouvons dire que c'est une Géométrie qui se place à la suite de la Géométrie euclidienne. Si nous supposons, en outre, que l'axiome en vertu duquel de trois points d'une droite il en est toujours un et un seul

(1) Outre les auteurs antérieurs, consulter à ce sujet HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Chap. IV, Leipzig; Teubner, 1899. Comparer aussi une Note ajoutée au Chap. IV de la traduction de cet Ouvrage (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XVII; 1900) où M. Hilbert parle des travaux fondamentaux sur ce sujet de M. Gérard, professeur au lycée Charlemagne.

(2) GAUSS, *Werke*, t. VIII, p. 242.

Digitized by Google

situé entre les deux autres, cesse d'être vérifié, nous obtenons la Géométrie (elliptique) de Riemann, en sorte que celle-ci se manifeste comme une Géométrie placée à la suite de celle de Lobatchefskij.

Si, d'une manière analogue, nous voulons examiner les principes dans le cas de l'axiome d'Archimède, nous n'avons qu'à supposer que cet axiome n'est pas vérifié et nous obtenons alors les Géométries non archimédiennes dont M. Veronese et moi nous avons fait l'étude. Or, une question plus générale qui se présente ensuite est celle de savoir si l'on pourrait encore, en partant d'autres points de vue, édifier des Géométries qui, avec non moins de droit que les précédentes, se placeraient à la suite de la Géométrie euclidienne habituelle. A cet effet, j'attirerai votre attention sur un théorème que beaucoup d'auteurs d'ailleurs ont pris comme définition de la ligne droite, à savoir que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. Cet énoncé se réduit essentiellement à ce théorème d'Euclide que, dans un triangle, la somme de deux côtés est toujours plus grande que le troisième; il est facile de voir que, dans ce théorème, il ne s'agit que de concepts élémentaires, c'est-à-dire dérivant immédiatement des axiomes; il est, par suite, d'une discussion plus abordable que la proposition en question de la droite plus court chemin. Euclide démontre ce théorème au moyen de la proposition de l'angle extérieur en s'appuyant sur les théorèmes de congruence. Or, il est aisé de se convaincre que la démonstration du théorème d'Euclide en question *est impossible* si l'on invoque *uniquement* les théorèmes de congruence relatifs au transport de segments et d'angles, et l'on voit qu'il est nécessaire, en outre, d'employer dans la démonstration un théorème de la congruence des triangles. Alors cette question se présente : Existe-t-il une Géométrie où sont vérifiés tous les axiomes de la Géométrie euclidienne habituelle et, en particulier, tous les axiomes de congruence, sauf l'axiome de congruence de triangles dont il vient d'être parlé (c'est-à-dire encore une Géométrie où ne sera pas vérifié le théorème d'après lequel les angles à la base d'un triangle isoscèle sont égaux)

Digitized by Google

et où, de plus, le théorème que, dans tout triangle, la somme de deux côtés est plus grande que le troisième, est posé comme un axiome particulier?

Or, l'on reconnaît qu'une telle Géométrie existe effectivement, et n'est pas autre que celle exposée par M. Minkowski dans son livre, *Geometrie der Zahlen* (1), et prise par lui comme base de ses recherches arithmétiques. La Géométrie de Minkowski est donc aussi une Géométrie qui se place à la suite de la Géométrie euclidienne habituelle; elle est essentiellement caractérisée par les conventions suivantes :

Premièrement, les points à égale distance d'un point fixe O sont représentés par une surface convexe fermée de l'espace euclidien habituel et dont le centre est le point O ;

Secondement, deux segments sont encore dits *égaux* quand on peut les faire coïncider au moyen d'une translation de l'espace euclidien habituel.

Dans la Géométrie de Minkowski, l'axiome des parallèles est vérifié. Dans une Note (2) que j'ai publiée sur le théorème relatif à la droite chemin le plus court d'un point à un autre, je suis parvenu à une Géométrie où l'axiome des parallèles *n'est pas* vérifié, tandis que tous les autres axiomes de la Géométrie de Minkowski le sont. En raison du rôle important joué par le théorème de la ligne droite plus court chemin d'un point à un autre, ainsi que par le théorème d'Euclide sur la somme de deux côtés d'un triangle, qui est essentiellement équivalent, non seulement dans la théorie des nombres, mais encore dans la théorie des surfaces et le Calcul des variations, et comme je suis convaincu qu'une discussion approfondie des conditions relatives à la validité de ces théorèmes jetterait également un nouveau jour sur le concept de distance ainsi que sur d'autres notions élémentaires, par exemple sur la définition du plan et sur la possibilité de le définir au moyen du concept de droite,

(1) Leipzig, Teubner.
(2) *Math. Annalen*, t. XLVI, p. 91.

Digitized by Google

il me semble désirable que l'on fasse *une discussion et une exposition systématique des Géométries possibles ici.*

Dans le cas du plan et en admettant l'axiome de continuité, le problème dont il s'agit conduit à la question traitée par M. Darboux (1) : Déterminer tous les problèmes du Calcul des variations dans le plan où les solutions sont toutes les droites du plan; question qui me semble susceptible et digne de généralisations fécondes et intéressantes (2).

V. — De la notion des groupes continus de transformations de Lie, en faisant abstraction de l'hypothèse que les fonctions définissant les groupes sont susceptibles de différentiation.

On sait qu'en employant la notion des groupes continus de transformation, Lie a établi un système d'axiomes pour la Géométrie, et a démontré au moyen de sa théorie des groupes continus de transformations que ce système d'axiomes suffit pour édifier la Géométrie.

Or, dans l'exposition de sa théorie, Lie suppose toujours que les fonctions définissant les groupes sont *susceptibles de différentiation;* alors rien dans ces développements ne nous dit si, dans la question des axiomes de la Géométrie, cette hypothèse relative à la différentiation est de toute nécessité, ou si elle ne serait pas plutôt une conséquence du concept de groupes ainsi que des autres axiomes géométriques employés. Cette considération, ainsi que certains problèmes relatifs aux axiomes arithmétiques, nous mènent à cette question plus générale : *Jusqu'à quel point le concept de groupes continus de transformations de Lie est-il accessible, si l'on rejette l'hypothèse que les fonctions en question sont susceptibles de différentiation?*

On sait que Lie définit le groupe fini continu de transformations

(1) *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* t. III, p. 54; Paris, 1894.

(2) *Comparer* les intéressantes recherches de M. A. Hirsch (*Math. Annalen,* t. XLIX et L).

Digitized by Google

comme un système de transformations

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

tel que deux transformations quelconques

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r),$$
$$x''_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n; b_1, \ldots, b_r)$$

du système, opérées l'une après l'autre, fournissent une transformation appartenant également au système et, par suite, représentable sous la forme

$$x''_i = f_i[f_1(x, a) \ldots, f_n(x, a); b_1, \ldots, b_r] = f_i(x_1, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_r),$$

où $c_1, \ldots, c_r$ sont certaines fonctions de $a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r$. La propriété de groupe se trouve ainsi exprimée par un système d'équations fonctionnelles et ne soumet donc les fonctions $f_1, \ldots, f_n$; $c_1, \ldots, c_r$ à aucune autre restriction. Maintenant la méthode de traitement par Lie de ces équations fonctionnelles, à savoir la dérivation des équations différentielles connues dont on part, présuppose nécessairement la continuité des fonctions définissant le groupe ainsi que la possibilité de les différentier.

Quant à la continuité, on devra conserver d'abord cette condition, quand ce ne serait qu'eu égard aux applications géométriques et arithmétiques où la continuité des fonctions en question apparaît comme conséquence de l'axiome de continuité. Au contraire, la possibilité de différentier les fonctions définissant les groupes renferme une condition que l'on ne peut exprimer dans les axiomes géométriques que d'une façon bien détournée et bien compliquée, et il se présente alors cette question : Ne serait-il pas toujours possible, par l'introduction de nouvelles variables et de paramètres convenablement choisis, de ramener le groupe à un autre où les fonctions qui le définissent seraient susceptibles de différentiation? Ou encore ne serait-il pas au moins possible, au moyen de l'introduction de certaines hypothèses simples, de ramener le groupe à un autre qui serait accessible aux méthodes de Lie? La réduction aux groupes

Digitized by Google

analytiques est, d'après un théorème énoncé par Lie (1) et démontré par Schur (2), toujours possible, pourvu que le groupe soit transitif et pourvu que l'on admette l'existence des dérivées premières et de certaines dérivées secondes des fonctions définissant le groupe.

L'étude des questions analogues dans le cas des groupes infinis est intéressante aussi, ce me semble. On est alors, en général, conduit au champ vaste et non sans intérêt des équations fonctionnelles. Celles-ci, jusqu'ici, ont été surtout étudiées dans l'hypothèse de la possibilité de différentier les fonctions qui s'y rapportent. En particulier les équations fonctionnelles, traitées avec tant de perspicacité par Abel (3), les équations aux différences finies, et d'autres équations déjà rencontrées ne nous apprennent rien par elles-mêmes sur cette condition de la possibilité de différentier les fonctions en question; ce sont certaines démonstrations d'existence dans le calcul des variations qui m'ont directement imposé ce problème : tirer d'une équation aux différences la démonstration de la possibilité de différentier la fonction considérée. Dans tous ces cas on est donc conduit à cette question : *Jusqu'à quel point les affirmations admissibles dans le cas où l'on suppose les fonctions susceptibles de différentiation conservent-elles, avec certaines modifications convenables, leur validité dans le cas où l'on rejette cette hypothèse?*

Remarquons d'ailleurs que M. Minkowski, dans sa *Géométrie des nombres* précitée, prend comme point de départ l'équation fonctionnelle

$$f(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) \leqq f(x_1, \ldots, x_n)+f(y_1, \ldots, y_n)$$

et parvient, au moyen de cette équation, à démontrer l'existence de certaines dérivées pour les fonctions en question.

---

(1) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppe*, t. III, § 82 et 144. Leipzig, 1893.

(2) *Ueber den analytischen Character der eine endliche continuirliche Transformationsgruppe darstellenden Functionen* (*Math. Annalen*, t. XLI).

(3) *Œuvres*, édit. Sylow et Lie, t. I, p. 1, 61, 389.

Digitized by Google

D'autre part, je ferai remarquer qu'il peut très bien exister des équations fonctionnelles analytiques dont les seules solutions sont des fonctions non susceptibles de différentiation. Ainsi, on peut construire une fonction $\varphi(x)$ uniforme et continue, non susceptible de différentiation et qui représente l'unique solution des deux équations fonctionnelles

$$\varphi(x+\alpha)-\varphi(x)=f(x),$$
$$\varphi(x+\beta)-\varphi(x)=0,$$

où α et β sont deux nombres réels et où $f(x)$ désigne une fonction uniforme analytique et régulière pour toutes les valeurs réelles de x. La manière la plus simple de construire de pareilles fonctions, c'est d'employer des séries trigonométriques en se servant d'idées analogues à celles que M. Borel a appliquées, ainsi que M. Picard (1) nous l'apprend, à la construction d'une solution non analytique, doublement périodique d'une certaine équation analytique aux dérivées partielles.

VI. — Le traitement mathématique des axiomes de la Physique.

Les recherches sur les principes fondamentaux de la Géométrie nous conduisent à envisager ce problème : *Traiter sur ce modèle les branches de la Physique où les Mathématiques jouent aujourd'hui un rôle prépondérant; ces branches de la Science sont, avant toutes autres, le Calcul des Probabilités et la Mécanique.*

Quant aux axiomes du Calcul des probabilités (2), il me semblerait très désirable que l'on en fît la discussion logique en même temps qu'en Physique mathématique on développerait parallèlement d'une manière rigoureuse et satisfaisante la méthode des

(1) *Quelques théories fondamentales dans l'Analyse mathématique.* Conférences faites à Clark University, 1900. — Extrait de la *Revue générale des Sciences,* publié sous forme de livre par Armand Colin et Cie, p. 22.

(2) *Comparer* BOHLMANN, *Ueber Versicherungsmathematik*, zweite Vorlesung, aus KLEIN und RIECKE, *Ueber angewandte Mathematik und Physik.* Leipzig und Berlin, 1900.

Digitized by Google

valeurs moyennes, et cela tout particulièrement dans la théorie cinétique des gaz.

Quant aux principes de la Mécanique, nous possédons déjà au point de vue physique des recherches d'une haute portée; je citerai, par exemple, les écrits de MM. Mach (1), Hertz (2), Boltzmann (3) et Volkmann (4). Il serait aussi très désirable qu'un examen approfondi des principes de la Mécanique fût alors tenté par les mathématiciens. Ainsi le Livre de M. Boltzmann sur les *Principes de la Mécanique* nous incite à établir et à discuter au point de vue mathématique d'une manière complète et rigoureuse les méthodes basées sur l'idée de passage à la limite, et qui de la conception atomique nous conduisent aux lois du mouvement des *continua*. Inversement on pourrait, au moyen de méthodes basées sur l'idée de passage à la limite, chercher à déduire les lois du mouvement des corps rigides d'un système d'axiomes reposant sur la notion d'états d'une matière remplissant tout l'espace d'une manière continue, variant d'une manière continue et que l'on devra définir paramétriquement.

Quoi qu'il en soit, c'est la question de l'équivalence des divers systèmes d'axiomes qui présentera toujours l'intérêt le plus grand quant aux principes.

Pour que l'exemple de la Géométrie soit applicable au traitement des axiomes de la Physique, nous devons chercher à renfermer une classe aussi générale que possible de phénomènes physiques dans un nombre restreint d'axiomes; puis, au moyen de l'addition de nouveaux axiomes, il faut parvenir successivement aux théories plus particulières. Peut-être pourrait-on ici emprunter un principe de subdivision à cette profonde Théorie des groupes infinis de transformations de Lie. Le mathématicien, de même qu'en Géométrie, devra ici aussi avoir égard, non seulement aux théories qui se rap-

(1) *Die Mechanik in ihrer Entwickelung*. Leipzig, zweite Auflage; 1889.
(2) *Die Principien der Mechanik*. Leipzig; 1894.
(3) *Vorlesungen über die Principe der Mechanik*. Leipzig; 1897.
(4) *Einführung in das Studium der theoretischen Physik*. Leipzig; 1900.

Digitized by Google

prochent de la réalité, mais encore en général à toutes celles qui sont logiquement possibles, et il devra toujours soigneusement chercher à obtenir une vue d'ensemble complète sur toutes les conséquences qu'entraîne le système d'axiomes choisi.

Enfin, pour compléter les théories physiques, le mathématicien devra attaquer le problème qui consiste en chaque cas à examiner si le nouvel axiome ajouté n'est pas en contradiction avec les précédents. Le physicien se voit souvent obligé, par le résultat de ses expériences, de faire de nouvelles hypothèses, et cela même *pendant* le développement de ses théories, et il invoque alors au sujet de la non-contradiction des nouvelles hypothèses avec les précédentes, ces expériences précisément, ou encore un certain sentiment physique. Ce sont là des procédés qui ne sont pas admissibles dans l'édification rigoureusement logique d'une théorie. La démonstration requise de la non-contradiction de toutes les hypothèses faites me semble encore d'une grande importance par la raison que l'effort nécessité par cette démonstration conduit toujours de la manière la plus effective à un énoncé exact des axiomes mêmes.

Jusqu'ici nous avons exclusivement examiné les *principes fondamentaux* des diverses branches de la Science mathématique. Il est certain que l'étude et la discussion des principes d'une science possèdent un charme particulier et l'examen de ces principes sera toujours un des plus importants sujets de recherches. « Le but final », a dit Weierstrass, « que l'on doit avoir devant les yeux est la recherche d'un jugement exact sur les principes fondamentaux de la science.... Pour pénétrer dans le domaine de la Science il est, sans doute, indispensable aussi de s'occuper de problèmes particuliers. » En effet, pour pouvoir examiner avec fruit les principes d'une science, il faut être familiarisé avec ses théories particulières; seul, l'architecte qui connaît à fond, dans tous leurs détails, les diverses destinations d'un bâtiment, sera capable d'en poser sûrement les fondations. Nous allons donc maintenant passer en revue des problèmes spéciaux dans les diverses branches de la Mathématique, et nous commencerons par l'Arithmétique et l'Algèbre.

Digitized by Google

VII. — Irrationalité et transcendance de certains nombres.

Les théorèmes arithmétiques de M. Hermite sur la fonction exponentielle et leur extension par M. Lindemann feront certainement l'admiration de toutes les générations futures de mathématiciens. Cette admiration accroît encore notre désir de continuer dans cette voie. C'est ce qu'a fait M. Hurwitz dans deux intéressants travaux sur les propriétés arithmétiques de certaines fonctions transcendantes ([1]). Aussi indiquerai-je ici une classe de problèmes qui me semblent devoir être attaqués les premiers. Lorsque nous savons de certaines fonctions transcendantes importantes de l'Analyse qu'elles prennent des valeurs algébriques pour certains arguments algébriques, cela nous semble toujours particulièrement remarquable et digne d'une étude approfondie. Nous nous attendons toujours à voir les fonctions transcendantes prendre, en général, pour des arguments algébriques des valeurs transcendantes, et quoique l'on sache bien qu'il existe des fonctions transcendantes entières possédant des valeurs rationnelles pour tous leurs arguments algébriques, néanmoins nous regardons comme extrêmement probable que la fonction exponentielle $e^{i\pi z}$, par exemple, qui, pour toutes les valeurs rationnelles de l'argument z prend évidemment toujours des valeurs algébriques, prenne d'autre part, pour toutes les valeurs irrationnelles algébriques de l'argument z, des valeurs toujours transcendantes. Nous pouvons donner à cet énoncé la forme géométrique suivante : *Lorsque, dans un triangle isoscèle, le rapport entre l'angle à la base et l'angle au sommet est algébrique, mais non rationnel, le rapport entre la base et l'autre côté sera toujours transcendant.* Malgré la simplicité de cet énoncé et sa ressemblance avec les propositions découvertes par MM. Hermite et Lindemann, j'en regarde la démonstration comme extrêmement difficile, et il en sera de même de la proposition suivante : *La puissance α^β, pour une base algébrique α et un exposant algébrique*

([1]) *Math. Annalen,* t. XXII et XXXII.

Digitized by Google

irrationnel β, *comme par exemple le nombre* $2^{\sqrt{2}}$ *ou* $e^{\pi} = i^{-2i}$, *représente toujours un nombre transcendant ou pour le moins irrationnel.* Il est certain que la résolution de ces problèmes et d'autres analogues doit conduire à des méthodes nouvelles, ainsi qu'à de nouveaux points de vue relativement à la nature de nombres irrationnels et transcendants particuliers.

VIII. — Problèmes sur les nombres premiers.

La théorie de la distribution des nombres premiers a reçu, dans ces derniers temps, une impulsion essentielle sous l'influence des travaux de MM. Hadamard, de la Vallée-Poussin, H. von Mangoldt et autres. Pour résoudre complètement le problème posé dans le Mémoire de Riemann *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée,* il est encore nécessaire de démontrer l'affirmation si importante de Riemann que *les zéros de la fonction* $\zeta(s)$, qui est représentée par la série

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots,$$

ont tous leur partie réelle égale à $\frac{1}{2}$, abstraction faite des zéros connus, qui sont des nombres entiers négatifs. Une fois cette démonstration obtenue, le problème ultérieur sera la discussion plus précise de la série infinie de Riemann pour le nombre des nombres premiers, et il faudra en particulier *reconnaître si la différence entre le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité* x *et le logarithme intégral de* x *devient effectivement infinie avec* x *d'un ordre inférieur à* $\frac{1}{2}$; il faudrait ensuite reconnaître si les termes de la formule de Riemann qui dépendent des premiers zéros complexes de la fonction $\zeta(s)$ sont la cause véritable de la condensation par places des nombres premiers, remarquée dans les dénombrements empiriques.

Après avoir épuisé ce sujet de la discussion de la formule de Riemann relative aux nombres premiers, on pourrait peut-être

Digitized by Google

donner une réponse rigoureuse au problème de Goldbach [1] où l'on se demande si tout nombre pair est représentable par une somme de deux nombres premiers; vient ensuite cette question connue : Y a-t-il une infinité de couples de nombres premiers ayant comme différence le nombre 2? Et ce problème plus général : L'équation linéaire de Diophante

$$ax + by + c = 0,$$

où les coefficients a, b, c sont des nombres entiers donnés dont deux sont premiers entre eux, est-elle toujours résoluble en nombres entiers premiers x, y?

Mais un problème d'intérêt non moindre et qui me semble peut-être d'une importance encore plus considérable est le suivant : *Transporter les résultats obtenus pour la distribution des nombres premiers rationnels à la théorie de la distribution des idéaux premiers d'un corps de nombres donné k.* C'est là un problème qui revient à l'étude de la fonction

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s},$$

relative au corps k, et où la somme doit être étendue à tous les idéaux $\mathfrak{j}$ du corps de nombres donné k, et où $n(\mathfrak{j})$ désigne la norme de l'idéal $\mathfrak{j}$.

Je citerai encore trois problèmes particuliers de la Théorie des nombres, à savoir un problème sur les lois de réciprocité, un autre sur les équations de Diophante, enfin le dernier appartenant au domaine des formes quadratiques.

IX. — Démonstration de la loi de réciprocité la plus générale dans un corps de nombres quelconque.

On demande de démontrer dans le cas d'un corps de nombres quelconque la loi de réciprocité des résidus de puissances de

---

(1) *Comparer* M.-P. Stackel, *Ueber Goldbach's empirisches Theorem* (*Göttinger Nachrichten;* 1896), et M. Landau, *loc. cit.;* 1900.

Digitized by Google

degré l, *l* désignant un nombre premier impair, ou encore *l* désignant soit une puissance de 2, soit une puissance d'un nombre premier impair. On pourra, je crois, établir la loi et découvrir les méthodes essentielles nécessaires à la démontrer, en généralisant convenablement la théorie que j'ai développée (1) à propos du corps des racines $l^{\text{ièmes}}$ de l'unité et ma théorie (2) des corps relativement quadratiques.

X. — De la possibilité de résoudre une équation de Diophante.

On donne une équation de Diophante à un nombre quelconque d'inconnues et à coefficients entiers rationnels : *On demande de trouver une méthode par laquelle, au moyen d'un nombre fini d'opérations, on pourra distinguer si l'équation est résoluble en nombres entiers rationnels.*

XI. — Des formes quadratiques à coefficients algébriques quelconques.

Nos connaissances actuelles dans la Théorie des corps quadratiques (3) nous permettent d'attaquer avec fruit la *Théorie des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables et dont les coefficients sont des nombres algébriques quelconques.* Nous sommes conduits alors à cette question des plus intéressantes : Étant donnée une équation quadratique à nombre quelconque de variables et à coefficients algébriques, la résoudre en nombres entiers ou fractionnaires faisant partie des domaines algébriques de rationalité déterminés par les coefficients.

---

(1) *Bericht der D. M. V., über die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, 5e Partie, t. IV; 1897.

(2) *Math. Annalen*, t. LI, et *Göttingen Nachrichten*, 1898.

(3) HILBERT, *Ueber den Dirichletschen biquadratischen Zählenkörper* (*Math. Annalen*, t. XLV). — *Ueber die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper* (*Berichte der D. M. V.*; 1897, et *Math. Annalen*, t. LI). — *Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Körper* (*Göttinger Nachrichten*; 1898). — *Grundlagen der Geometrie*. Festschrift. Leipzig; 1899, Chap. VIII, § 83 (traduit dans les *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XVII; 1900).

Digitized by Google

Le problème important qui suit servira de trait d'union entre la Théorie des nombres, d'une part, et l'Algèbre et la Théorie des fonctions, d'autre part.

XII. — Extension du théorème de Kronecker sur les corps abéliens à un domaine de rationalité algébrique quelconque.

C'est à Kronecker que l'on doit ce théorème que tout corps de nombres abélien dans le domaine des nombres rationnels est engendré par composition de corps de racines de l'unité. Ce théorème fondamental de la théorie des équations à coefficients numériques entiers renferme deux affirmations :

Premièrement, le théorème répond à la question relative au nombre et à l'existence des équations qui, dans le domaine des nombres rationnels, ont un degré, un groupe abélien et un discriminant assignés.

Secondement, le théorème nous dit que les racines de telles équations constituent un domaine de nombres algébriques qui coïncide exactement avec le domaine que l'on obtient lorsque, dans la fonction exponentielle $e^{i\pi z}$, on donne successivement à l'argument z toutes les valeurs numériques rationnelles.

La *première* affirmation soulève la question de la détermination de certains nombres algébriques au moyen de leur groupe et de leur ramification; cette question correspond donc au problème connu de la détermination des fonctions algébriques appartenant à une surface de Riemann donnée.

La *seconde* affirmation fournit les nombres demandés par un moyen transcendant, à savoir, au moyen de la fonction exponentielle $e^{i\pi z}$.

Après le domaine des nombres rationnels, le plus simple est celui du corps imaginaire quadratique; le problème qui se présente d'abord est donc celui d'étendre à ce corps le théorème de Kronecker. Kronecker lui-même a affirmé que les équations abéliennes dans le domaine d'un corps quadratique sont fournies par les équations de transformation des fonctions elliptiques à module singu-

Digitized by Google

lier, en sorte qu'ici les fonctions elliptiques jouent le rôle occupé, dans le cas précédent, par la fonction exponentielle. La démonstration de cette affirmation de Kronecker n'a pas encore été effectuée; je crois que l'on peut y arriver, sans rencontrer de difficultés insurmontables, en s'appuyant sur la théorie de la multiplication complexe développée par M. Weber (1), en même temps que sur les théorèmes purement arithmétiques que j'ai établis sur les classes de corps.

Enfin, ce qui me semble d'une importance capitale, c'est l'extension du théorème de Kronecker au cas où, *au lieu du domaine des nombres rationnels ou bien des nombres du corps imaginaire quadratique, on prend, comme domaine de rationalité, un corps de nombres algébriques quelconques.*

JE REGARDE CE PROBLÈME COMME UN DES PLUS PROFONDS ET DES PLUS IMPORTANTS DE TOUTE LA THÉORIE DES NOMBRES ET DES FONCTIONS.

Ce problème paraît abordable d'une foule de côtés. La clef la plus capable de nous ouvrir la voie à la solution de la partie arithmétique du problème est, selon moi, la loi générale de réciprocité des résidus de puissances $l^{\text{ièmes}}$ dans un corps de nombres quelconque assigné.

Quant à la partie du problème qui est relative à la Théorie des fonctions, le chercheur se laissera conduire dans ce domaine si attrayant par les remarquables analogies que l'on observe entre la Théorie des fonctions algébriques d'une variable et celle des nombres algébriques. L'analogue du développement en série de puissances d'une fonction algébrique, dans la Théorie des nombres, a été établi et étudié par M. Hensel (2); quant à l'analogue du théorème de Riemann-Roch, il a été traité par M. Landsberg (3). En-

(1) H. WEBER, *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen.* Braunschweig; 1891.

(2) *Jahresberichte der D. M. V.*, t. VI, ainsi qu'un Mémoire des *Math. Annalen : Ueber die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen.*

(3) *Math. Annalen,* t. L; 1898.

Digitized by Google

suite l'analogie entre la notion du genre d'une surface de Riemann et la notion du nombre des classes d'un corps de nombres saute aux yeux. Pour ne parler que du cas le plus simple, considérons, d'une part, une surface de Riemann de genre $p = 1$, et, d'autre part, un corps de nombres où le nombre des classes est $h = 2$; alors à la démonstration de l'existence d'une intégrale partout finie sur la surface de Riemann correspond la démonstration de l'existence d'un nombre entier α dans le corps de nombres tel que le nombre $\sqrt{\alpha}$ représente un corps non ramifié relativement quadratique par rapport au corps de base. Dans la Théorie des fonctions algébriques on sait que, pour démontrer ce théorème d'existence riemannien, on emploie la méthode du problème de Dirichlet; de même, dans la Théorie des corps de nombres, c'est la démonstration de l'existence du nombre α qui présente aussi la difficulté principale. La démonstration s'appuie essentiellement sur le théorème que dans un corps de nombres il existe toujours des idéaux premiers possédant des caractères résiduels assignés. Ce dernier fait joue par suite, dans la Théorie des nombres, un rôle analogue à celui que joue le problème de Dirichlet dans la Théorie des fonctions.

Dans la Théorie des fonctions l'équation du théorème d'Abel énonce, comme on sait, la condition nécessaire et suffisante pour que les points en question de la surface de Riemann soient les zéros d'une fonction algébrique appartenant à la surface. L'analogue précis du théorème d'Abel, dans la Théorie des corps de nombres, où le nombre des classes est $h = 2$, est l'équation de la loi de réciprocité quadratique [1]

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{j}}\right) = +1,$$

qui nous dit que l'idéal $\mathfrak{j}$ sera un idéal principal du corps de nombres, au seul et unique cas où le nombre α possède par rapport à l'idéal $\mathfrak{j}$ un caractère résiduel quadratique *positif*.

Nous voyons que, dans les problèmes que nous venons d'exami-

---

[1] *Comparer* Hilbert, *Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Zählkörper* (*Göttinger Nachrichten;* 1898).

Digitized by Google

ner, les trois branches fondamentales des Mathématiques, à savoir la Théorie des nombres, l'Algèbre et la Théorie des fonctions, sont dans le rapport le plus intime, et je suis convaincu que la Théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables ferait un progrès essentiel si l'on arrivait à *la découverte et l'étude des fonctions qui, dans un corps de nombres algébriques quelconque donné, jouent le rôle analogue à celui joué, dans le corps des nombres rationnels, par la fonction exponentielle, et, dans le corps imaginaire quadratique, par la fonction modulaire elliptique.*

Nous arrivons maintenant à l'Algèbre; je parlerai dans ce qui suit d'un problème de la Théorie des équations, et d'un autre problème auquel m'a conduit la Théorie des invariants algébriques.

XIII. — Impossibilité de la résolution de l'équation générale du septième degré au moyen de fonctions de deux arguments seulement.

La Nomographie [1] a pour but la résolution des équations au moyen du tracé de réseaux de courbes qui dépendent d'*un* paramètre arbitraire. On voit immédiatement que toute racine d'une équation dont les coefficients dépendent de deux paramètres seulement, c'est-à-dire que toute fonction de deux variables indépendantes, est représentable d'une foule de manières, d'après ce principe de la Nomographie. Enfin, il est évident que ce principe, qui ne comporte l'emploi d'*aucun élément mobile*, permet de représenter une grande classe de fonctions de trois variables et plus, à savoir toutes les fonctions que l'on peut obtenir en construisant d'abord une fonction de deux arguments, puis en remplaçant chacun de ces arguments par une fonction de deux arguments, ces derniers à leur tour étant encore remplacés par des fonctions de deux arguments et ainsi de suite, en formant ainsi un enchaînement fini de fonctions de deux arguments. Par exemple, toute fonction rationnelle d'un nombre quelconque d'arguments appartient à cette classe de fonctions que l'on peut construire au moyen de tables nomographiques;

---

[1] M. D'OCAGNE, *Traité de Nomographie*. Paris, Gauthier-Villars; 1899.

Digitized by Google

en effet, cette fonction peut être construite par addition, soustraction, multiplication et division, et chacune de ces opérations ne représente qu'une fonction de deux arguments. On voit de même que les racines de toutes les équations résolubles par radicaux dans un domaine naturel de rationalité appartiennent à la classe précitée de fonctions; en effet, aux quatre opérations élémentaires on ne fait qu'ajouter l'opération d'extraction de racines, qui représente uniquement une fonction d'*un* argument. Semblablement, les équations du cinquième et du sixième degré sont résolubles par le moyen de Tables nomographiques convenables; en effet, ces équations, par le moyen de transformations de Tschirnausen, qui elles-mêmes n'exigent que l'extraction de racines, peuvent être mises sous une forme où les coefficients ne dépendent que de deux paramètres.

Or il est probable que les racines des équations du septième degré sont des fonctions de leurs coefficients qui n'appartiennent pas à la classe susdite des fonctions que l'on peut construire par le moyen d'un enchaînement fini de fonctions de deux arguments. Pour le prouver, il serait nécessaire de démontrer que *l'équation du septième degré*

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$$

est impossible à résoudre au moyen de fonctions continues quelconques de deux arguments seulement.

Je remarquerai seulement qu'un examen rigoureux m'a prouvé qu'il existe des fonctions analytiques de trois arguments x, y, z *impossibles* à obtenir au moyen d'enchaînements en nombre fini de fonctions de deux arguments seulement (1).

XIV. — Démontrer que certains systèmes de fonctions sont finis.

Dans la Théorie des invariants algébriques, il me semble que les questions où il s'agit de savoir si les systèmes de formes complets

(1) Dans ce § XIII, en fait de méthodes nomographiques, M. Hilbert n'a visé que celles qui ne comportent *aucun élément mobile*. En effet, l'introduction d'éléments mobiles permet de construire des fonctions de plus de deux arguments. C'est ce que M. d'Ocagne a fait voir (*Comptes rendus*, t. CXXXI, p. 522; 1900), et cela

Digitized by Google

sont finis présentent un intérêt particulier. Dernièrement, M. L. Maurer ([1]) a réussi à étendre les théorèmes en question relatifs à la Théorie des invariants démontrés par M. Gordan et par moi, au cas où ce n'est pas, comme dans la Théorie usuelle des invariants, le groupe général projectif qui est pris comme base de la définition des invariants, mais un sous-groupe quelconque.

Un progrès essentiel dans cette direction avait déjà été effectué par M. A. Hurwitz ([2]) lorsqu'il parvint, par une méthode des plus ingénieuses, à démontrer d'une manière générale que le nombre des invariants orthogonaux d'une forme fondamentale quelconque est fini.

En m'occupant de cette question du nombre fini des invariants, j'ai été conduit à un problème simple qui renferme comme cas particulier la question susdite et dont la solution exige probablement un développement de la Théorie de l'élimination et des systèmes de modules de Kronecker, poussé beaucoup plus loin qu'on n'a réussi à le faire jusqu'à présent.

Supposons que l'on ait assigné un nombre m de fonctions rationnelles entières $X_1, X_2, \ldots, X_m$ des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(S) \qquad \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ X_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Toute liaison rationnelle entière entre $X_1, X_2, \ldots, X_m$, où l'on introduira les expressions ci-dessus, sera nécessairement une fonction rationnelle de $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Cependant, il peut aussi très bien se faire qu'il y ait des fonctions rationnelles fractionnaires de

---

précisément à l'occasion de la conférence de M. Hilbert ici traduite. La méthode dite *des points alignés,* qui comporte l'emploi d'une simple droite, permet très aisément de donner une solution nomographique de l'équation du septième degré. (L. L.)

([1]) *Comparer* les *Sitzungsberichte der K. Acad. der Wiss. zu München;* 1899, et un Travail paru peu après dans les *Math. Annalen.*

([2]) *Ueber die Erzeugung der Invarianten durch Integration* (*Göttinger Nachrichten;* 1897).

Digitized by Google

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ qui, après l'opération des substitutions (S), deviendront des fonctions *entières* en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Une telle fonction rationnelle de $X_1, \ldots, X_m$ qui, après que l'on aura effectué les substitutions (S), sera devenue une fonction entière en $x_1, \ldots, x_n$, je la nommerai une fonction *relativement entière* de $X_1, \ldots, X_m$. Il est évident que toute fonction entière de $X_1, \ldots, X_m$ est aussi relativement entière; enfin, la somme, la différence et le produit de fonctions relativement entières sont également des fonctions relativement entières.

Le problème qui se présente alors est celui-ci : *Est-il toujours possible de trouver un système fini de fonctions relativement entières de* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *avec lesquelles on puisse composer d'une manière rationnelle entière toute autre fonction relativement entière de* $X_1, X_2, \ldots, X_m$? On peut formuler le problème encore plus simplement, si l'on introduit la notion de *domaine fini d'intégrité*.

Par *domaine fini d'intégrité*, j'entends un système de fonctions tel que l'on puisse toujours y choisir un nombre fini de fonctions à l'aide desquelles toutes les autres fonctions du système soient exprimables d'une manière rationnelle entière. Notre problème revient donc à démontrer que toutes les fonctions relativement entières d'un domaine quelconque de rationalité forment toujours un domaine fini d'intégrité.

Nous sommes enfin conduits à *rendre le problème encore plus précis en le faisant rentrer dans la pure théorie des nombres;* on regardera, dans ce cas, les coefficients des fonctions données $f_1, f_2, \ldots, f_m$ comme étant des nombres entiers rationnels et, par *fonctions relativement entières* de $X_1, \ldots, X_m$, on entendra seulement des fonctions rationnelles de ces arguments, telles que, après l'opération des substitutions (S), elles deviennent des fonctions rationnelles entières de $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients rationnels entiers.

Un cas particulièrement simple du problème ainsi précisé est celui-ci : Soient $X_1, \ldots, X_m$, m fonctions rationnelles entières à coefficients rationnels entiers de l'unique variable x, et soit p un

Digitized by Google

nombre premier donné. Considérons le système des fonctions rationnelles entières de x, qui peuvent être mises sous la forme

$$\frac{G(X_1, \ldots, X_m)}{p^h},$$

où G désigne une fonction rationnelle entière de ses arguments $X_1, \ldots, X_m$ et où p^h est une puissance quelconque du nombre premier p. Des recherches que j'ai publiées autrefois dans les *Math. Annalen*, t. XXXVI, p. 485, font voir immédiatement que toutes les expressions de cette nature forment, pour chaque exposant déterminé h, un domaine fini d'intégrité; mais il s'agit ici de savoir s'il en est de même pour tous les exposants h, c'est-à-dire qu'il s'agit de savoir si l'on peut choisir un nombre fini de pareilles expressions au moyen desquelles toute autre expression de cette forme peut être exprimée d'une manière entière et rationnelle pour un exposant h quelconque.

Je mentionnerai maintenant deux problèmes qui font partie de ce domaine intermédiaire qui confine à l'Algèbre et à la Géométrie : l'un est relatif à la Géométrie énumérative, l'autre à la Topologie des courbes et des surfaces algébriques.

XV. — Établissement rigoureux de la Géométrie énumérative de Schubert.

Le problème est le suivant :

Détermination rigoureuse des nombres de la Géométrie énumérative, et cela en fixant d'une manière plus précise les limites de leur validité, et, en particulier, des nombres que Schubert (1) *a trouvés en s'appuyant sur le principe de son calcul énumératif, dit* de la position spéciale *ou* de la conservation du nombre.

Bien que l'Algèbre moderne regarde, en principe, comme pos-

(1) *Kalcul der Abzählenden Geometrie.* Leipzig; 1879.

Digitized by Google

sibles à effectuer les calculs des procédés d'élimination, les démonstrations des théorèmes de la Géométrie énumérative exigent des considérations ultérieures, savoir : on doit effectuer les éliminations relatives à certaines équations de forme particulière, en sorte que le degré des équations finales soit possible à prévoir, ainsi que les ordres de multiplicité de leurs solutions.

XVI. — Problèmes de topologie des courbes et des surfaces algébriques.

Le nombre maximum des branches fermées et séparées que peut posséder une courbe plane algébrique d'ordre n a été déterminé par Harnack ([1]); reste la question de la situation mutuelle qu'occupent entre elles dans le plan les branches d'une courbe. En ce qui concerne les courbes du sixième ordre, je suis parvenu à prouver ([2]), en entrant, il est vrai, dans beaucoup de détails, que les onze branches que peut avoir une courbe du sixième ordre, d'après Harnack, ne peuvent jamais avoir leurs cours tous séparés et qu'il doit, au contraire, exister une branche à l'intérieur de laquelle se trouve une branche *unique*, tandis que les *neuf* autres ont leurs cours à son extérieur, et réciproquement. *Une étude approfondie des positions relatives des branches séparées dans le cas de leur nombre maximum me semble présenter un grand intérêt, et il en est de même de la recherche analogue relative au nombre, à la forme et à la position relative des nappes d'une surface algébrique dans l'espace.* Jusqu'ici d'ailleurs l'on ne sait absolument rien sur le nombre maximum effectif de nappes que peut avoir une surface du quatrième ordre de l'espace à trois dimensions ([3]).

Comme suite à ce problème purement algébrique, j'attirerai l'attention sur la question suivante, qui me semble pouvoir être attaquée au moyen de la méthode de la variation continue des coefficients; la

---

([1]) *Mathematische Annalen*, t. X.

([2]) *Ueber die reellen Züge algebraischen Curven* (*Math. Annalen*, t. XXXVIII, p. 116-138).

([3]) *Comparer* Rohn, *Flächen vierter Ordnung*. Preisschrift der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. Leipzig; 1886.

Digitized by Google

réponse à cette question est d'ailleurs importante pour la topologie des familles de courbes définies par des équations différentielles : *Déterminer le nombre maximum et la situation relative des* CYCLES LIMITES *de M. Poincaré dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre et du premier degré* de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

où X, Y désignent des fonctions rationnelles entières de degré n, de x, y, ou, en employant l'écriture homogène, de la forme

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

où X, Y, Z désignent des fonctions rationnelles entières et homogènes de degré n, de x, y, z, ces fonctions devant être déterminées comme fonctions du paramètre.

XVII. — Représentation des formes définies par des sommes de carrés.

Une fonction ou forme rationnelle entière à nombre quelconque de variables et à coefficients réels est dite *définie* lorsqu'elle ne prend jamais de valeurs négatives pour aucune valeur réelle des variables. Le système de toutes les formes définies se comporte d'une manière invariante vis-à-vis des opérations de l'addition et de la multiplication; le quotient de deux fonctions définies, tant que c'est une fonction entière des variables, est une forme définie. Le carré d'une forme quelconque est évidemment toujours une forme définie, mais, ainsi que je l'ai démontré [1], une forme définie quelconque ne peut pas toujours être composée par addition au moyen de carrés de formes; il se présente alors cette question, que j'ai résolue dans le sens affirmatif dans le cas des formes ternaires [2] : *Une forme définie quelconque peut-elle être toujours représentée*

(1) *Math. Annalen*, t. XXXII.
(2) *Acta mathematica*, t. XVII.

Digitized by Google

comme quotient de sommes de carrés de formes? Il serait en même temps extrêmement utile de savoir, dans certaines questions relatives à la possibilité de certaines constructions géométriques, si les coefficients des formes représentantes peuvent être toujours pris dans le domaine de rationalité donné par les coefficients de la forme représentée ([1]).

Je citerai encore un problème géométrique.

XVIII. — Partition de l'espace en polyèdres congruents.

Dans les questions où il s'agit de ces groupes de déplacements dans le plan, pour lesquels il existe une région fondamentale, on sait que la réponse est très différente suivant que l'on considère le plan (elliptique) de Riemann, le plan (parabolique) d'Euclide, ou le plan (hyperbolique) de Lobatchefskij. Dans le cas du plan elliptique, le nombre des régions fondamentales d'une espèce essentiellement différente est *fini*, et il suffit d'un nombre *fini* d'exemplaires de régions congruentes pour recouvrir sans lacunes le plan tout entier : le groupe est constitué par un nombre fini de déplacements. Dans le cas du plan hyperbolique, le nombre de régions fondamentales d'une espèce essentiellement différente est *infini :* ce sont les célèbres polygones de M. Poincaré; pour recouvrir sans lacunes le plan tout entier, il faut un nombre *infini* d'exemplaires de régions congruentes. C'est le plan parabolique euclidien qui forme le cas intermédiaire; en effet, dans ce cas il n'existe qu'un nombre *fini* d'espèces essentiellement différentes de groupes de déplacements à région fondamentale, tandis que pour recouvrir sans lacunes le plan tout entier il faut un nombre *infini* d'exemplaires de régions congruentes.

Des faits complètement analogues ont lieu dans l'espace à trois

---

([1]) *Comparer* HILBERT, la *Festschrift* déjà citée; *Grundlagen der Geometrie,* Chap. VII, en particulier le § 38.

Digitized by Google

dimensions. Le fait que le nombre des groupes de déplacements dans l'espace elliptique est *fini* est une conséquence immédiate d'un théorème de M. C. Jordan ([1]), en vertu duquel le nombre des espèces essentiellement distinctes de groupes *finis* de substitutions linéaires à n variables ne peut dépasser une certaine limite finie dépendant de n. Les groupes de déplacements à région fondamentale dans l'espace hyperbolique ont été étudiés par MM. Klein et Fricke dans les *Leçons sur la théorie des fonctions automorphes* ([2]); enfin MM. Feodorow ([3]), Schœnflies ([4]), et dernièrement M. Rohn ([5]) ont démontré que, dans l'espace parabolique d'Euclide, il n'y a qu'un nombre fini d'espèces essentiellement différentes de groupes de déplacements à région fondamentale. Or, tandis que les résultats et les méthodes de démonstrations relatives aux espaces elliptiques et hyperboliques s'étendent immédiatement aux espaces à n dimensions, il semble, au contraire, que la généralisation du théorème relatif à l'espace euclidien présente des difficultés considérables; il serait donc à désirer que l'on se proposât cette recherche : *Reconnaître si, dans l'espace euclidien à n dimensions, il n'existe qu'un nombre* FINI *d'espèces différentes de groupes de déplacements à région fondamentale.*

Une région fondamentale de chaque groupe de déplacements, jointe aux régions congruentes provenant du groupe, fournit évidemment un recouvrement sans lacunes de l'espace tout entier. Alors se pose la question suivante : *Existe-t-il aussi des polyèdres qui* NE *se présentent* PAS *comme régions fondamentales de groupes de déplacements, et au moyen desquels cependant on peut, en juxtaposant convenablement les exemplaires congruents, arriver à remplir sans lacunes l'espace tout entier?* Je citerai aussi une question qui se relie à la précédente; question importante pour la

([1]) *Journal für Mathematik*, t. LXXXIV; 1878, et *Atti della Reale Accademia di Napoli;* 1880.

([2]) T. I, en particulier Section I, Chap. II et IV: Leipzig, 1897.

([3]) *Symetrie der regelmässigen Systeme von Figuren;* 1890.

([4]) *Krystallsysteme und Krystallstructur;* Leipzig, 1891.

([5]) *Math. Annalen,* t. LVIII.

Digitized by Google

Théorie des nombres et peut-être utile aussi en Physique et en Chimie : c'est la question de savoir comment on pourrait, avec la plus grande densité possible, remplir l'espace au moyen d'un nombre infini de corps de même forme assignée d'avance, par exemple au moyen de sphères d'un rayon donné ou de tétraèdres d'arêtes données (on pourrait aussi assigner d'avance la position des arêtes); autrement dit, on demande de répartir ces corps dans l'espace de façon que le rapport de l'espace rempli à l'espace vide soit le plus grand possible.

Si nous jetons un coup d'œil sur le développement de la théorie des fonctions pendant le XIXe siècle, nous remarquons avant tout le rôle fondamental joué par cette classe de fonctions que l'on nomme aujourd'hui *fonctions analytiques*, classe de fonctions qui resteront toujours le point central de l'intérêt mathématique.

Il serait facile de distribuer toutes les fonctions concevables dignes d'intérêt en classes formées à des points de vue divers. Considérons, par exemple, la classe des fonctions *susceptibles d'être définies au moyen d'équations différentielles algébriques ordinaires ou au moyen d'équations de même nature aux dérivées partielles*. On remarque immédiatement que cette classe de fonctions *ne renferme pas* des fonctions qui proviennent de la théorie des nombres, fonctions dont l'étude est pour nous de l'intérêt le plus élevé. Par exemple, la fonction $\zeta(s)$, dont on a déjà parlé, ne vérifie aucune équation différentielle algébrique, comme c'est facile à reconnaître au moyen de la relation connue entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$ et en invoquant le théorème où M. Hölder [1] démontre que la fonction $\Gamma(x)$ ne vérifie aucune équation différentielle algébrique. Il est aussi très vraisemblable que la fonction des deux variables s et x, définie par la série

$$\zeta(s, x) = x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \frac{x^4}{4^s} + \ldots$$

---

[1] *Math. Annalen*, t. XXVIII.

Digitized by Google

et qui est intimement liée à la fonction $\zeta(s)$, ne vérifie aucune équation algébrique aux dérivées partielles; dans l'étude de cette dernière question, on devra faire usage de l'équation fonctionnelle

$$x \frac{\partial \zeta(s, x)}{\partial x} = \zeta(s-1, x).$$

D'autre part, si par des considérations arithmétiques et géométriques nous sommes conduits à envisager la classe de toutes les fonctions *continues et susceptibles d'être différentiées indéfiniment*, nous devrons dans leur étude renoncer à ce moyen de travail si maniable des séries de puissances et à cette propriété que la fonction soit complètement déterminée par la succession de ses valeurs dans une région quelconque, si petite qu'elle soit. Par conséquent, tandis que la précédente limitation du domaine fonctionnel semblait trop étroite, celle-ci nous paraît beaucoup trop large.

Le concept de fonction *analytique*, au contraire, embrasse dans son domaine toutes les fonctions les plus importantes de la Science, qu'elles proviennent de la Théorie des nombres, de la Théorie des équations différentielles ou des équations fonctionnelles algébriques, ou même encore de la Géométrie et de la Physique mathématique; c'est donc avec raison que, dans le royaume des fonctions, l'on donne le rôle prépondérant aux fonctions analytiques.

XIX. — Les solutions des problèmes réguliers du calcul des variations sont-elles nécessairement analytiques?

Je regarde comme un des faits vraiment les plus remarquables des éléments de la Théorie des fonctions analytiques qu'il y ait des équations aux dérivées partielles dont les intégrales sont toutes nécessairement des fonctions *analytiques* des variables indépendantes, ou, pour abréger le langage, qu'il y ait des équations aux dérivées partielles qui ne soient susceptibles que de solutions analytiques. Les équations aux dérivées partielles les plus connues de

Digitized by Google

cette espèce sont l'équation du potentiel

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

et certaines équations linéaires étudiées par M. Picard [1], enfin l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f,$$

l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima et beaucoup d'autres. La plupart de ces équations aux dérivées partielles ont ce signe distinctif commun : ce sont des équations différentielles de Lagrange, de certains problèmes du Calcul des variations, à savoir de ces problèmes de variation définis par la formule

$$\int\int F(p, q, z; x, y)\,dx\,dy = \text{minimum}$$
$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

où pour tous les arguments considérés doit avoir lieu l'inégalité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\right)^2 > 0,$$

F étant une fonction analytique. Nous nommerons un tel problème du Calcul des variations, un problème *régulier*. Ce sont les problèmes réguliers du Calcul des variations qui jouent un rôle principal en Géométrie, en Mécanique et en Physique mathématique; on est donc conduit à se demander si toutes les solutions des problèmes réguliers du Calcul des variations sont toujours nécessairement des fonctions *analytiques*, c'est-à-dire *si toute équation aux dérivées partielles de Lagrange d'un problème régulier du Calcul des variations a comme propriété de n'admettre que des intégrales analytiques*, alors même que la fonction, comme dans le problème de Dirichlet, prendrait sur le contour des valeurs quelconques continues, mais non analytiques.

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique;* 1890.

Digitized by Google

Je remarquerai encore qu'il existe, par exemple, des surfaces à courbure gaussienne constante *négative* qui sont représentées par des fonctions continues et susceptibles de différentiation successive, mais non analytiques, tandis qu'il est au contraire probable que toute surface à courbure gaussienne constante *positive* est nécessairement une surface analytique ([1]). On sait bien, d'ailleurs, que les surfaces à courbure constante positive sont intimement liées à ce problème régulier du Calcul des variations : faire passer par une courbe gauche fermée une surface dont l'aire soit un minimum, cette surface étant assujettie à la condition de renfermer avec une surface fixe un volume donné, la surface fixe elle-même devant passer par la courbe gauche donnée.

XX. — Problème de Dirichlet dans le cas général.

Un important problème, intimement lié au précédent, est celui de l'existence des solutions d'équations aux dérivées partielles devant prendre des valeurs assignées le long de contours donnés. Les méthodes si perspicaces de MM. H.-A. Schwarz, C. Neumann et Poincaré ont résolu ce problème, dans le cas de l'équation de Laplace, quant aux points les plus essentiels, mais en général ces méthodes ne semblent pas susceptibles d'être étendues au cas où sont encore assignées, le long du contour, les valeurs des dérivées ou encore des relations entre ces dernières et la fonction, ou bien lorsqu'il ne s'agit plus de surfaces potentielles, mais, par exemple, de surface minima ou de surfaces à courbure gaussienne constante positive, assujetties à passer par une courbe gauche assignée ou à toucher une surface annulaire le long d'une courbe fermée. Je suis persuadé que l'on parviendrait à effectuer ces démonstrations en se basant sur une idée mère générale à laquelle se rattache le principe de

([1]) *Comparer* le Mémoire subséquent de M. Hilbert sur ce sujet : *Ueber flächen von constanter Gausschen Krummung* (*Transactions of the American mathematical Society*, Vol. II, n° 1, p. 87-99; January 1901). (L. L.)

Digitized by Google

Dirichlet et qui nous permettrait d'aborder de plus près cette question : *Chaque problème régulier du Calcul des variations ne possède-t-il pas une solution, pourvu que certaines hypothèses soient vérifiées, relativement aux conditions limitatives données,* relativement, par exemple, à la continuité et à la possibilité de différentier, plus ou moins de fois *successives,* les fonctions dont il s'agit, *et pourvu nécessairement aussi que la notion de solution soit convenablement généralisée* (¹)?

XXI. — Démonstration de l'existence d'équations différentielles linéaires ayant un groupe de monodromie assigné.

Dans la Théorie des équations différentielles linéaires à une variable indépendante z, j'attirerai l'attention sur un très important problème, que Riemann d'ailleurs avait déjà en vue, et qui consiste à démontrer qu'*il existe toujours une équation différentielle linéaire de la classe de M. Fuchs ayant des points critiques donnés et un groupe de monodromie donné.* Ce problème exige donc que l'on trouve n fonctions de la variable z qui se comportent partout régulièrement dans le plan de la variable complexe z, sauf en certains points critiques donnés : en ces points l'ordre d'infinitude des fonctions doit être fini, et lorsque la variable z décrit un contour autour de ces points, les fonctions doivent éprouver les substitutions linéaires données. L'existence de pareilles équations différentielles est rendue très probable au moyen d'un dénombrement de constantes, mais jusqu'ici l'on n'est parvenu à une démonstration rigoureuse que dans le cas particulier où les racines des équations fondamentales des substitutions données ont l'unité pour valeur absolue. M. L. Schlesinger (²) a établi cette démonstration en s'appuyant sur la théorie des fonctions zeta-fuchsiennes de M. Poincaré. Il est clair

(¹) *Comparer* ma Note sur le *Principe de Dirichlet* (*Jahresbericht der D. M. V.*, t. VIII, p. 184; 1900, traduite dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3e série, t. XIX; 1900).

(²) *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen,* Vol. II, Partie II, nº 366.

Digitized by Google

que la théorie des équations différentielles linéaires gagnerait essentiellement en unité si l'on parvenait à résoudre d'une manière générale le problème que je viens d'indiquer.

XXII. — Relations analytiques exprimées d'une manière uniforme au moyen de fonctions automorphes.

On sait que M. Poincaré a démontré le premier qu'une relation *algébrique* quelconque entre deux variables peut toujours être exprimée d'une manière uniforme au moyen de fonctions automorphes d'une variable; autrement dit, étant donnée une équation algébrique entre deux variables, on peut toujours trouver pour ces dernières des fonctions uniformes automorphes d'une variable qui, portées dans l'équation algébrique, la vérifient identiquement. L'extension de ce théorème fondamental à des relations quelconques non algébriques, mais analytiques, entre deux variables, a été faite avec grand succès par M. Poincaré [1], et cela par une voie tout autre que celle qui l'avait conduit au but dans la question antérieure du cas algébrique.

Mais la démonstration par laquelle M. Poincaré fait voir qu'il est possible d'exprimer d'une manière uniforme une relation analytique quelconque entre deux variables ne nous montre pas encore si l'on peut choisir les fonctions uniformes de la nouvelle variable, de telle sorte que, tandis que cette variable parcourt le domaine *régulier* de ces fonctions, on obtienne une représentation effective de l'ensemble de *tous* les points réguliers de la fonction analytique donnée.

Au contraire, il semblerait, d'après les recherches de M. Poincaré, que, abstraction faite des points de ramification, on doit encore, en général, mettre de côté une infinité de points isolés de la fonction analytique donnée, que l'on obtient seulement quand la nouvelle variable tend vers certains points limites des fonctions. *Un éclaircissement et une solution de ces difficultés me paraissent*

---

(1) *Bulletin de la Soc. Math. de France*, t. XI; 1883.

Digitized by Google

extrêmement désirables en raison de l'importance fondamentale de la question traitée par M. Poincaré.

A la suite de ce problème prend place la même question dans le cas de relations algébriques ou analytiques entre trois ou un plus grand nombre de variables, problème que l'on sait résoudre en un grand nombre de cas; les nouvelles recherches de M. Picard sur les fonctions algébriques de deux variables doivent être regardées ici comme des travaux préliminaires de la plus grande importance et du plus grand secours.

XXIII. — Extension des méthodes du Calcul des variations.

Jusqu'ici je n'ai cité, autant que possible, que des problèmes déterminés et particuliers, car je pense que ce sont précisément les problèmes déterminés et particuliers qui nous attirent le plus et qui ont l'influence la plus immédiate sur l'ensemble de la Science. Je vais néanmoins terminer cette Conférence par un problème général, problème ayant trait à une discipline que j'ai déjà plusieurs fois mentionnée; cette discipline, malgré les progrès considérables que lui a fait faire Weierstrass, il n'y a pas bien longtemps, n'est cependant pas encore, selon moi, appréciée par les mathématiciens à sa juste valeur. C'est du *Calcul des variations* (¹) que je parle. Le peu de progrès de cette discipline tient peut-être à ce que l'on manquait jusqu'ici de livres écrits au point de vue moderne sur ce sujet. On en doit d'autant plus de remercîments à M. A. Kneser, dont

(¹) Comme Traités je citerai : Moigno-Lindelof, *Leçons sur le Calcul des variations;* Paris, 1861, et A. Kneser, *Lehrbuch der Variationsrechnung;* Braunschweig, 1900.

Pour donner une idée du contenu de ce Livre, nous ferons simplement observer que M. Kneser, dans les problèmes les plus simples, de même que dans le cas où une limite d'intégration est variable, établit des conditions suffisantes relatives à la valeur extrême et emploie l'enveloppe d'une famille de courbes qui vérifient les équations différentielles du problème, pour démontrer la nécessité de la condition de Jacobi relative à la valeur extrême. Attirons encore l'attention sur ce point que M. Kneser, dans son Livre, applique aussi la théorie de Weierstrass à la question de la valeur extrême de quantités définies par des équations différentielles.

Digitized by Google

nous venons de citer le Livre en note. Ce traité de *Calcul des variations* est rédigé d'après les points de vue les plus nouveaux, et l'Auteur y a toujours eu égard à la parfaite rigueur exigée aujourd'hui.

Le Calcul des variations, au sens le plus large, est l'étude de la variation des fonctions et nous apparaît, à ce point de vue, comme une continuation nécessaire du Calcul différentiel et intégral. A ce point de vue, les recherches de M. Poincaré sur le Problème des trois corps, par exemple, forment un Chapitre du *Calcul des variations*, en ce sens que M. Poincaré, au moyen du principe des variations, déduit d'orbites connues, ayant certaines propriétés, de nouvelles orbites jouissant de propriétés semblables.

Aux remarques générales, faites au début de cette Conférence sur le *Calcul des variations*, je vais ajouter ici une rapide exposition de ce qui faisait l'objet de ces remarques.

Le problème le plus simple du Calcul des variations proprement dit consiste, comme on sait, à trouver une fonction y de la variable x, telle que l'intégrale définie

$$J = \int_a^b F(y_x, y; x)\,dx \qquad \left(y_x = \frac{dy}{dx}\right)$$

prenne la plus petite valeur de toutes celles que prend ladite intégrale quand on y remplace y par d'autres fonctions de x en conservant les mêmes valeurs initiales et finales données dans l'intégrale définie. On sait que, dans l'interprétation habituelle, l'évanouissement de la variation première

$$\delta J = 0$$

fournit, pour obtenir la fonction y cherchée, l'équation différentielle bien connue du second ordre

$$(1) \qquad \frac{dF_{y_x}}{dx} - F_y = 0 \qquad \left(F_{y_x} = \frac{\partial F}{\partial y_x}, \qquad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Maintenant, pour approfondir les conditions nécessaires et suffisantes à l'existence du minimum cherché, considérons l'*inté-*

Digitized by Google

grale

$$J^* = \int_a^b [F + (y_x - p) F_p] dx$$

$$\left[F = F(p, y; x), \qquad F_p = \frac{\partial F(p, y; x)}{\partial p}\right]$$

et cherchons comment nous devons choisir p comme fonction de x, y, afin que la valeur de J^* soit indépendante du chemin d'intégration, c'est-à-dire du choix de la fonction y de la variable x. L'intégrale J^* a la forme

$$J^* = \int_a^b (A y_x - B) dx,$$

où A et B ne renferment pas y_x, et l'évanouissement de la variation première

$$\delta J^* = 0,$$

interprétée ainsi que l'exige la nouvelle manière de poser la question, fournit l'équation

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire que, pour la fonction p des deux variables x, y, nous avons l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1^*) \qquad \frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial (p F_p - F)}{\partial y} = 0.$$

L'équation différentielle ordinaire du second ordre (1) et l'équation aux dérivées partielles (1*) que nous venons de trouver ont entre elles un rapport intime. C'est ce que nous fait voir de suite clairement la transformation simple

$$\begin{aligned}\delta J^* &= \int_a^b [F_y \delta y + F_p \delta p + (\delta y_x - \delta p) F_p + (y_x - p) \delta F_p] dx \\ &= \int_a^b [F_y \delta y + \delta y_x F_p + (y_x - p) \delta F_p] dx \\ &= \delta J + \int_a^b (y_x - p) \delta F_p dx.\end{aligned}$$

Digitized by Google

De cette formule nous concluons les faits suivants : Si nous considérons une famille quelconque *simple* de courbes intégrales de l'équation différentielle ordinaire du second ordre (1) et si nous formons alors une équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$y_x = p(x, y) \tag{2}$$

qui admette également comme solutions ces courbes intégrales, la fonction $p(x, y)$ sera toujours aussi une intégrale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (1*); et réciproquement, si l'on désigne par $p(x, y)$ une solution quelconque de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (1*), toutes les intégrales non singulières de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre (2) seront également intégrales de l'équation différentielle du second ordre (1).

En abrégeant le langage, on peut dire : Si $y_x = p(x, y)$ est une équation intégrale du premier ordre de l'équation différentielle du second ordre (1), $p(x, y)$ représentera une intégrale de l'équation aux dérivées partielles (1*) et réciproquement; les courbes intégrales de l'équation différentielle ordinaire du second ordre (1) sont, par conséquent, aussi les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (1*).

Dans le cas précédent nous trouvons aussi le même résultat au moyen d'un calcul facile; ce calcul nous fournit respectivement les équations en question (1) et (1*) sous la forme

$$y_{xx} F_{y_x y_x} + y_x F_{y_x y} + F_{y_x x} - F_y = 0, \tag{1}$$

$$(p_x + p p_y) F_{pp} + p F_{py} + F_{px} - F_y = 0, \tag{1*}$$

où les indices inférieurs, d'après une notation facile à interpréter, désignent les dérivées partielles prises par rapport à x, y, p, y_x. Ces formules permettent de reconnaître aisément l'exactitude de la relation dont il était question.

L'étroite relation que nous venons d'exposer et de démontrer entre l'équation différentielle ordinaire du second ordre (1) et l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (1*) est, ce me

Digitized by Google

semble, d'une importance capitale au point de vue des principes fondamentaux du Calcul des variations. En effet, la valeur de l'intégrale J* étant indépendante du chemin d'intégration, on aura

$$(3)\qquad \int_a^b [F(p)+(J_x-p)F_p(p)]dx = \int_a^b F(\overline{y_x})dx,$$

où dans le premier membre l'intégrale est prise le long d'un chemin y quelconque, tandis que l'on supposera l'intégrale du second membre prise le long d'une courbe intégrale $\overline{y}$ de l'équation différentielle

$$\overline{y_x} = p(x, \overline{y}).$$

A l'aide de l'équation (3) nous parvenons à la formule de Weierstrass

$$(4)\qquad \int_a^b F(y_x)dx - \int_a^b F(\overline{y_x})dx = \int_a^b E(y_x, p)dx,$$

où E désigne l'expression de Weierstrass

$$E(y_x, p) = F(y_x) - F(p) - (y_x - p)F_p(p),$$

dépendant des quatre arguments y_x, p, y, x. Comme, d'après cela, tout revient uniquement à border la courbe intégrale $\overline{y}$ en question, dans le plan des x, y, d'une manière continue et univoque, avec des valeurs d'une fonction intégrale correspondante $p(x, y)$, les développements indiqués conduisent évidemment, et cela sans introduire la considération de la variation seconde et en effectuant simplement l'opération polaire [1] sur l'équation différentielle (1), à l'établissement de la condition de Jacobi, et fournissent la réponse à la question de savoir jusqu'à quel point la condition de Jacobi, jointe à la condition $E > 0$ de Weierstrass, est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un minimum.

---

[1] Pour la définition de cette opération, *voir* le compte rendu de M. Meyer *Sur la Théorie des invariants* (*Jahresbericht der D. M. V.*, t. I, p. 199), ou encore le même, Traduction de M. Fehr, dans le *Bulletin de M. Darboux*, t. XIX, p. 24; 1895. (L. L.)

Digitized by Google

Les développements indiqués peuvent, sans autre calcul, s'étendre au cas de deux ou un plus grand nombre de fonctions cherchées, ainsi qu'au cas d'une intégrale double ou multiple. Ainsi, dans le cas d'une intégrale double

$$J = \int F(z_x, z_y, z, x, y)\, d\omega \quad \left(z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

étendue à une région donnée ω, l'évanouissement

$$\delta J = 0$$

de la variation première, interprétée dans le sens habituel, fournit, pour la fonction z cherchée de x, y, l'équation différentielle du second ordre bien connue

$$(\mathrm{I}) \quad \frac{\partial F_{z_x}}{dx} + \frac{\partial F_{z_y}}{dy} - F_z = 0 \qquad \left(F_{z_x} = \frac{\partial F}{\partial z_x}, \quad F_{z_y} = \frac{\partial F}{\partial z_y}, \quad F_z = \frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

D'autre part, considérons l'*intégrale*

$$J^* = \int [F + (z_x - p) F_p + (z_y - q) F_q]\, d\omega$$

$$\left[F = F(p, q, z; x, y), \quad F_p = \frac{\partial F(p, q, z, x, y)}{\partial p}, \quad F_q = \frac{\partial F(p, q, z, x, y)}{\partial q}\right],$$

et demandons-nous comment nous devons prendre p et q comme fonctions de x, y, z, de manière que la valeur de J^* soit indépendante du choix de la surface passant par la courbe gauche fermée donnée, c'est-à-dire indépendante du choix de la fonction z des variables x, y.

L'intégrale J^* a la forme

$$J^* = \int (A z_x + B z_y - C)\, d\omega,$$

et l'évanouissement de la variation première

$$\delta J^* = 0,$$

interprétée d'après le sens exigé par la nouvelle manière de poser la question, fournit l'équation

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0;$$

Digitized by Google

c'est-à-dire que nous obtenons pour les fonctions p et q des trois variables x, y, z l'équation différentielle du premier ordre

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y} + \frac{\partial (pF_p + qF_q - F)}{\partial z} = 0.$$

A cette équation si nous adjoignons encore l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathrm{I}^*) \qquad p_y + qp_x = q_x + pq_z,$$

tirée des équations

$$z_x = p(x, y, z), \qquad z_y = q(x, y, z),$$

on voit que l'équation aux dérivées partielles du second ordre (I), relative à la fonction z des deux variables x, y, et le système simultané (I*) des deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, relatif aux deux fonctions p, q des trois variables x, y, z, sont dans une relation tout à fait analogue à celle qui a lieu dans le cas précédent de l'intégrale simple entre les équations différentielles (1) et (1*).

L'intégrale J* ayant une valeur indépendante du choix de la surface d'intégration, on a

$$\int [F(p, q) - (z_x - p)F_p(p, q) + (z_y - q)F_q(p, q)]\, d\omega = \int F(\overline{z_x}, \overline{z_y})\, d\omega,$$

où l'intégrale du second membre doit être étendue à une surface intégrale $\overline{z}$ des équations aux dérivées partielles

$$\overline{z_x} = p(x, y, \overline{z}), \qquad \overline{z_y} = q(x, y, \overline{z});$$

au moyen de la précédente formule nous obtenons immédiatement la suivante

$$(\mathrm{IV}) \qquad \int F(z_x, z_y)\, d\omega - \int F(\overline{z_x}, \overline{z_y})\, d\omega = \int E(z_x, z_y, p, q)\, d\omega,$$

où

$$E(z_x, z_y, p, q) = F(z_x, z_y) - F(p, q) - (z_x - p)F_p(p, q) - (z_y - q)F_q(p, q),$$

Digitized by Google

qui joue relativement à la variation de l'intégrale double un rôle tout à fait pareil à celui que joue la formule (4) précédemment établie dans le cas de l'intégrale simple; nous avons encore par cette formule (IV) répondu à la question de savoir jusqu'à quel point la condition de Jacobi, jointe à la condition $E > 0$ de Weierstrass, est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un minimum.

Ces développements ont beaucoup de rapport avec les modifications que M. Kneser [1], en partant d'ailleurs d'autres points de vue, a apportées à la théorie de Weierstrass. En effet, tandis que Weierstrass, pour obtenir les conditions suffisantes relatives à la valeur extrême, fait usage des courbes intégrales de l'équation (1) passant par un point fixe, M. Kneser emploie une famille quelconque *simple* de ces courbes, et pour chaque pareille famille il construit une solution caractéristique de l'équation aux dérivées partielles que l'on doit regarder comme la généralisation de l'équation de Jacobi et Hamilton.

Les problèmes dont j'ai parlé ne sont que des essais; ils suffisent néanmoins à nous faire voir combien riche, multiple et étendue est la Science actuelle, et l'on est conduit ainsi à se demander si la Science mathématique ne finira pas, comme c'est depuis longtemps arrivé pour d'autres Sciences, par se partager en subdivisions séparées dont les représentants se comprendront à peine les uns les autres et dont la connexion deviendra toujours moindre. Je ne le pense ni ne l'espère; selon moi, la Science mathématique est un entier indivisible, un organisme dont la force vitale a pour condition l'indissolubilité de ses parties. En effet, quelle que soit la diversité des matières de notre Science dans ses détails, nous n'en sommes pas moins frappés de l'équivalence des procédés logiques, de la parenté des idées dans l'ensemble de la Science ainsi que des nombreuses analogies dans ses différents domaines. Nous remarquons

[1] *Comparer* le Traité déjà cité, § 14, 15, 19, 20.

Digitized by Google

encore ceci : plus une théorie mathématique se développe, plus son exposition gagne en harmonie et en unité, et plus on découvre de relations entre cette théorie et les branches de la Science qui lui étaient étrangères jusque-là. C'est ainsi qu'avec l'extension des Mathématiques leur caractère d'unité ne se perd pas, mais devient, au contraire, de plus en plus évident.

Mais, nous demandons-nous encore, avec l'extension de la Science mathématique ne deviendra-t-il pas enfin impossible au chercheur individuel d'embrasser toutes les branches de la Science? Comme réponse à cette question, je me contenterai de remarquer combien il est caractéristique de notre Science que chaque progrès effectif marche la main dans la main avec la découverte de moyens auxiliaires plus rigoureux et de méthodes plus simples qui, en même temps qu'ils facilitent la compréhension des théories antérieures et qu'ils amènent la disparition d'anciens développements inutiles, permettent de s'orienter dans toutes les branches des Mathématiques bien plus aisément que dans toute autre Science.

Le caractère d'unité de la Mathématique est l'essence même de cette Science. En effet, les Mathématiques sont les fondements de toutes les connaissances naturelles exactes. Pour qu'elles remplissent complètement ce but élevé, puissent-elles être dans le nouveau siècle cultivées par des maîtres géniaux et par nombre de jeunes gens brûlant d'un noble zèle!

Digitized by Google

DU ROLE

DE L'INTUITION ET DE LA LOGIQUE

EN MATHÉMATIQUES,

PAR M. HENRI POINCARÉ (PARIS).

I.

Il est impossible d'étudier les Œuvres des grands mathématiciens, et même celles des petits, sans remarquer et sans distinguer deux tendances opposées, ou plutôt deux sortes d'esprits entièrement différents. Les uns sont avant tout préoccupés de la logique; à lire leurs Ouvrages, on est tenté de croire qu'ils n'ont avancé que pas à pas, avec la méthode d'un Vauban qui pousse ses travaux d'approche contre une place forte, sans rien abandonner au hasard. Les autres se laissent guider par l'intuition et font du premier coup des conquêtes rapides, mais quelquefois précaires, ainsi que de hardis cavaliers d'avant-garde.

Ce n'est pas la matière qu'ils traitent qui leur impose l'une ou l'autre méthode. Si l'on dit souvent des premiers qu'ils sont des *analystes* et si l'on appelle les autres *géomètres*, cela n'empêche pas que les uns restent analystes, même quand ils font de la Géométrie, tandis que les autres sont encore des géomètres, même s'ils s'occupent d'Analyse pure. C'est la nature même de leur esprit qui les fait logiciens ou intuitifs, et ils ne peuvent la dépouiller quand ils abordent un sujet nouveau.

Digitized by Google

Ce n'est pas non plus l'éducation qui a développé en eux l'une des deux tendances et qui a étouffé l'autre. On naît mathématicien, on ne le devient pas, et il semble aussi qu'on naît géomètre, ou qu'on naît analyste.

Je voudrais citer des exemples et certes ils ne manquent pas; mais pour accentuer le contraste, je voudrais commencer par un exemple extrême; pardon, si je suis obligé de le chercher auprès de deux mathématiciens vivants.

M. Méray veut démontrer qu'une équation binome a toujours une racine. S'il est une vérité que nous croyons connaître par intuition directe, c'est bien celle-là. Qui doutera qu'un angle peut toujours être partagé en un nombre quelconque de parties égales? M. Méray n'en juge pas ainsi; à ses yeux, cette proposition n'est nullement évidente et pour la démontrer, il lui faut plusieurs pages.

Voyez au contraire M. Klein : il étudie une des questions les plus abstraites de la théorie des fonctions; il s'agit de savoir si sur une surface de Riemann donnée, il existe toujours une fonction admettant des singularités données : par exemple deux points singuliers logarithmiques avec des résidus égaux et de signe contraire. Que fait le célèbre géomètre allemand? Il remplace sa surface de Riemann par une surface métallique dont la conductibilité électrique varie suivant certaines lois. Il met les deux points logarithmiques en communication avec les deux pôles d'une pile. Il faudra bien que le courant passe, et la façon dont ce courant sera distribué sur la surface définira une fonction dont les singularités seront précisément celles qui sont prévues par l'énoncé.

Sans doute, M. Klein sait bien qu'il n'a donné là qu'un aperçu : toujours est-il qu'il n'a pas hésité à le publier; et il croyait probablement y trouver sinon une démonstration rigoureuse, du moins je ne sais quelle certitude morale. Un logicien aurait rejeté avec horreur une semblable conception, ou plutôt il n'aurait pas eu à la rejeter, car dans son esprit elle n'aurait jamais pu naître.

Permettez-moi encore de comparer deux hommes, dont l'un vient tout récemment de nous être enlevé par la mort, dont l'autre

Digitized by Google

est encore notre doyen vénéré, mais qui tous deux sont depuis longtemps entrés dans l'immortalité. Je veux parler de M. Bertrand et de M. Hermite. Ils ont été élèves de la même école et en même temps; ils ont subi la même éducation, les mêmes influences; et pourtant quelle divergence; ce n'est pas seulement dans leurs écrits qu'on la voit éclater; c'est dans leur enseignement, dans leur façon de parler, dans leur aspect même. Dans la mémoire de tous leurs élèves, ces deux physionomies se sont gravées en traits ineffaçables; pour la plupart d'entre nous qui avons eu le bonheur de suivre leurs leçons, ce souvenir est encore tout récent; il nous est aisé de l'évoquer.

Tout en parlant, M. Bertrand est toujours en action; tantôt il semble aux prises avec quelque ennemi extérieur, tantôt il dessine d'un geste de la main les figures qu'il étudie. Évidemment, il voit et il cherche à peindre, c'est pour cela qu'il appelle le geste à son secours. Pour M. Hermite, c'est tout le contraire; ses yeux semblent fuir le contact du monde; ce n'est pas au dehors, c'est au dedans qu'il cherche la vision de la vérité.

Parmi les géomètres allemands de ce siècle, deux noms surtout sont illustres; ce sont ceux des deux savants qui ont fondé la théorie générale des fonctions, Weierstrass et Riemann. Weierstrass ramène tout à la considération des séries et à leurs transformations analytiques; pour mieux dire, il réduit l'Analyse à une sorte de prolongement de l'Arithmétique; on peut parcourir tous ses Livres sans y trouver une figure. Riemann, au contraire, appelle tout de suite la Géométrie à son secours, chacune de ses conceptions est une image que nul ne peut oublier dès qu'il en a compris le sens.

Plus récemment, Lie était un intuitif; on aurait pu hésiter en lisant ses Ouvrages, on n'hésitait plus après avoir causé avec lui; on voyait tout de suite qu'il pensait en images. Mme Kowalevski était une logicienne.

Chez nos étudiants, nous remarquons les mêmes différences; les uns aiment mieux traiter leurs problèmes « par l'Analyse », les autres « par la Géométrie ». Les premiers sont incapables de « voir

Digitized by Google

dans l'espace », les autres se lasseraient promptement des longs calculs et s'y embrouilleraient.

Les deux sortes d'esprits sont également nécessaires aux progrès de la Science; les logiciens, comme les intuitifs, ont fait de grandes choses que les autres n'auraient pas pu faire. Qui oserait dire s'il aimerait mieux que Weierstrass n'eût jamais écrit, ou s'il préférerait qu'il n'y eût pas eu de Riemann? L'Analyse et la Synthèse ont donc toutes deux leur rôle légitime. Mais il est intéressant d'étudier de plus près quelle est dans l'histoire de la Science la part qui revient à l'une et à l'autre.

II.

Chose curieuse! Si nous relisons les Œuvres des anciens, nous serons tentés de les classer tous parmi les intuitifs. Et pourtant la nature est toujours la même, il est peu probable qu'elle ait commencé seulement dans ce siècle à créer des esprits amis de la logique.

Si nous pouvions nous replacer dans le courant des idées qui régnaient de leur temps, nous reconnaîtrions que beaucoup de ces vieux géomètres étaient analystes par leurs tendances. Euclide, par exemple, a élevé un échafaudage savant où ses contemporains ne pouvaient trouver de défaut. Dans cette vaste construction, dont chaque pièce, pourtant, est due à l'intuition, nous pouvons encore aujourd'hui sans trop d'efforts reconnaître l'œuvre d'un logicien.

Ce ne sont pas les esprits qui ont changé, ce sont les idées; les esprits intuitifs sont restés les mêmes; mais leurs lecteurs ont exigé d'eux plus de concessions.

Quelle est la raison de cette évolution?

Il n'est pas difficile de le découvrir. L'intuition ne peut nous donner la rigueur, ni même la certitude, on s'en est aperçu de plus en plus.

Citons quelques exemples. Nous savons qu'il existe des fonctions continues dépourvues de dérivées. Rien de plus choquant pour l'in-

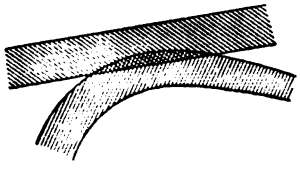
Digitized by Google

tuition que cette proposition qui nous est imposée par la logique. Nos pères n'auraient pas manqué de dire : « Il est évident que toute fonction continue a une dérivée, puisque toute courbe a une tangente. »

Comment l'intuition peut-elle nous tromper à ce point? C'est que quand nous cherchons à imaginer une courbe, nous ne pouvons pas nous la représenter sans épaisseur; de même, quand nous nous représentons une droite, nous la voyons sous la forme d'une bande rectiligne d'une certaine largeur. Nous savons bien que ces lignes n'ont pas d'épaisseur; nous nous efforçons de les imaginer de plus en plus minces et de nous rapprocher ainsi de la limite; nous y parvenons dans une certaine mesure, mais nous n'atteindrons jamais cette limite.

Et alors il est clair que nous pourrons toujours nous représenter ces deux rubans étroits, l'un rectiligne, l'autre curviligne, dans une

Fig. 1.



position telle qu'ils empiètent légèrement l'un sur l'autre sans se traverser (*fig.* 1).

Nous serons ainsi amenés, à moins d'être avertis par une analyse rigoureuse, à conclure qu'une courbe a toujours une tangente.

Je prendrai comme second exemple le principe de Dirichlet; on s'est contenté d'abord d'une démonstration sommaire. Une certaine intégrale dépendant d'une fonction arbitraire ne peut jamais s'annuler. On en conclut qu'elle doit avoir un minimum. Le défaut de ce raisonnement nous apparaît immédiatement parce que nous employons le terme abstrait de *fonction* et que nous sommes familiarisés avec toutes les singularités que peuvent présenter les fonctions quand on entend ce mot dans le sens le plus général.

Digitized by Google

Mais il n'en serait pas de même si l'on s'était servi d'images concrètes, si l'on avait par exemple considéré cette fonction comme un potentiel électrique; on aurait pu croire légitime d'affirmer que l'équilibre électrostatique peut être atteint. Peut-être cependant une comparaison physique aurait éveillé quelques vagues défiances. Mais si l'on avait pris soin de traduire le raisonnement dans le langage de la Géométrie, intermédiaire entre celui de l'Analyse et celui de la Physique, ces défiances ne se seraient sans doute pas produites, et peut-être pourrait-on ainsi, même aujourd'hui, tromper encore bien des lecteurs non prévenus.

L'intuition ne nous donne donc pas la certitude. Voilà pourquoi l'évolution devait se faire; voyons maintenant comment elle s'est faite.

On n'a pas tardé à s'apercevoir que la rigueur ne pourrait pas s'introduire dans les raisonnements, si on ne la faisait entrer d'abord dans les définitions.

Longtemps les objets dont s'occupent les mathématiciens étaient pour la plupart mal définis; on croyait les connaître parce qu'on se les représentait avec les sens ou l'imagination; mais on n'en avait qu'une image grossière et non une idée précise sur laquelle le raisonnement pût avoir prise.

C'est là d'abord que les logiciens ont dû porter leurs efforts.

Ainsi pour le nombre incommensurable.

L'idée vague de continuité, que nous devions à l'intuition, s'est résolue en un système compliqué d'inégalités portant sur des nombres entiers.

Par là les difficultés provenant des passages à la limite, ou de la considération des infiniment petits, se sont trouvées définitivement éclaircies.

Il ne reste plus aujourd'hui en Analyse que des nombres entiers ou des systèmes finis ou infinis de nombres entiers, reliés entre eux par un réseau de relations d'égalité ou d'inégalité.

Les Mathématiques, comme on l'a dit, se sont arithmétisées.

Digitized by Google

III.

Une première question se pose. Cette évolution est-elle terminée? Avons-nous atteint enfin la rigueur absolue? A chaque stade de l'évolution nos pères croyaient aussi l'avoir atteinte. S'ils se trompaient, ne nous trompons-nous pas comme eux?

Nous croyons dans nos raisonnements ne plus faire appel à l'intuition; les philosophes nous diront que c'est là une illusion. La logique toute pure ne nous mènerait jamais qu'à des tautologies; elle ne pourrait créer du nouveau; ce n'est pas d'elle toute seule qu'aucune science peut sortir.

Ces philosophes ont raison dans un sens; pour faire l'Arithmétique, comme pour faire la Géométrie, ou pour faire une science quelconque, il faut autre chose que la logique pure. Cette autre chose, nous n'avons pour la désigner d'autre mot que celui d'*intuition*. Mais combien d'idées différentes se cachent sous ce même mot?

Comparons ces quatre axiomes :

1° Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

2° Si un théorème est vrai du nombre 1 et si l'on démontre qu'il est vrai de $n+1$, pourvu qu'il le soit de n, il sera vrai de tous les nombres entiers.

3° Si sur une droite le point C est entre A et B et le point D entre A et C, le point sera entre A et B.

4° Par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.

Tous quatre doivent être attribués à l'intuition, et cependant le premier est l'énoncé d'une des règles de la logique formelle; le second est un véritable jugement synthétique *a priori*, c'est le fondement de l'induction mathématique rigoureuse; le troisième est un appel à l'imagination; le quatrième est une définition déguisée.

L'intuition n'est pas forcément fondée sur le témoignage des sens; les sens deviendraient bientôt impuissants; nous ne pouvons par

Digitized by Google

exemple nous représenter le chilogone et cependant nous raisonnons souvent par intuition sur les polygones en général, qui comprennent le chilogone comme cas particulier.

Vous savez ce que Poncelet entendait par le *principe de continuité*. Poncelet était l'un des esprits les plus intuitifs de ce siècle; il l'était avec passion, presque avec ostentation; il regardait le principe de continuité comme une de ses conceptions les plus hardies, et cependant ce principe ne reposait pas sur le témoignage des sens; c'était plutôt contredire ce témoignage que d'assimiler l'hyperbole à l'ellipse. Il n'y avait là qu'une sorte de généralisation hâtive et instinctive que je ne veux d'ailleurs pas défendre.

Nous avons donc plusieurs sortes d'intuitions; d'abord, l'appel aux sens et à l'imagination; ensuite, la généralisation par induction, calquée, pour ainsi dire, sur les procédés des sciences expérimentales; nous avons enfin l'intuition du nombre pur, celle d'où est sorti le second des axiomes que j'énonçais tout à l'heure et qui peut engendrer le véritable raisonnement mathématique.

Les deux premières ne peuvent nous donner la certitude, je l'ai montré plus haut par des exemples; mais qui doutera sérieusement de la troisième, qui doutera de l'Arithmétique?

Or, dans l'Analyse d'aujourd'hui, quand on veut se donner la peine d'être rigoureux, il n'y a plus que des syllogismes ou des appels à cette intuition du nombre pur, la seule qui ne puisse nous tromper. On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est atteinte.

IV.

Les philosophes font encore une autre objection : « Ce que vous gagnez en rigueur, disent-ils, vous le perdez en objectivité. Vous ne pouvez vous élever vers votre idéal logique qu'en coupant les liens qui vous rattachent à la réalité. Votre Science est impeccable, mais elle ne peut le rester qu'en s'enfermant dans une tour d'ivoire et en s'interdisant tout rapport avec le monde extérieur. Il faudra bien qu'elle en sorte dès qu'elle voudra tenter la moindre application. »

Digitized by Google

Je veux démontrer, par exemple, que telle propriété appartient à tel objet dont la notion me semble d'abord indéfinissable parce qu'elle est intuitive. J'échoue d'abord ou je dois me contenter de démonstrations par à peu près; je me décide enfin à donner à mon objet une définition précise, ce qui me permet d'établir cette propriété d'une manière irréprochable.

« Et après, disent les philosophes, il reste encore à montrer que l'objet qui répond à cette définition est bien le même que l'intuition vous avait fait connaître; ou bien encore que tel objet réel et concret dont vous croyiez reconnaître immédiatement la conformité avec votre idée intuitive, répond bien à votre définition nouvelle. C'est alors seulement que vous pourrez affirmer qu'il jouit de la propriété en question. Vous n'avez fait que déplacer la difficulté. »

Cela n'est pas exact; on n'a pas déplacé la difficulté, on l'a divisée. La proposition qu'il s'agissait d'établir se composait en réalité de deux vérités différentes, mais que l'on n'avait pas distinguées tout d'abord. La première était une vérité mathématique et elle est maintenant rigoureusement établie. La seconde était une vérité expérimentale. L'expérience seule peut nous apprendre que tel objet réel et concret répond ou ne répond pas à telle définition abstraite. Cette seconde vérité n'est pas démontrée mathématiquement, mais elle ne peut pas l'être, pas plus que ne peuvent l'être les lois empiriques des Sciences physiques et naturelles. Il serait déraisonnable de demander davantage.

Eh bien, n'est-ce pas un grand progrès d'avoir distingué ce qu'on avait longtemps confondu à tort?

Est-ce à dire qu'il n'y ait rien à retenir de cette objection des philosophes? Ce n'est pas cela que je veux dire; en devenant rigoureuse, la Science mathématique prend un caractère artificiel qui frappera tout le monde; elle oublie ses origines historiques; on voit comment les questions peuvent se résoudre, on ne voit plus comment et pourquoi elles se posent.

Cela nous montre que la logique ne suffit pas; que la Science de la démonstration n'est pas la Science tout entière et que l'intuition

Digitized by Google

doit conserver son rôle comme complément, j'allais dire comme contrepoids ou comme contrepoison de la logique.

Dans l'*Enseignement mathématique*, cette Revue créée par M. Laisant et qui commence à être bien connue du monde savant, j'ai déjà eu l'occasion d'insister sur la place que doit garder l'intuition dans l'enseignement des Sciences mathématiques. Sans elle, les jeunes esprits ne sauraient s'initier à l'intelligence des Mathématiques; ils n'apprendraient pas à les aimer et n'y verraient qu'une vaine logomachie; sans elle surtout, ils ne deviendraient jamais capables de les appliquer.

Mais aujourd'hui, c'est avant tout du rôle de l'intuition dans la Science elle-même que je voudrais parler. Si elle est utile à l'étudiant, elle l'est plus encore au savant créateur.

V.

Nous cherchons la réalité, mais qu'est-ce que la réalité ?

Les physiologistes nous apprennent que les organismes sont formés de cellules; les chimistes ajoutent que les cellules elles-mêmes sont formées d'atomes. Cela veut-il dire que ces atomes ou que ces cellules constituent la réalité ou du moins la seule réalité ? La façon dont ces cellules sont agencées et d'où résulte l'unité de l'individu, n'est-elle pas aussi une réalité, beaucoup plus intéressante que celle des éléments isolés, et un naturaliste qui n'aurait jamais étudié l'éléphant qu'au microscope croirait-il connaître suffisamment cet animal ?

Eh bien, en Mathématiques, il y a quelque chose d'analogue. Le logicien décompose pour ainsi dire chaque démonstration en un très grand nombre d'opérations élémentaires; quand on aura examiné ces opérations les unes après les autres et qu'on aura constaté que chacune d'elles est correcte, croira-t-on avoir compris le véritable sens de la démonstration ? L'aura-t-on compris même quand, par un effort de mémoire, on sera devenu capable de répéter cette démonstration en reproduisant toutes ces opérations élémentaires dans l'ordre même où les avait rangées l'inventeur ?

Digitized by Google

Évidemment non, nous ne posséderons pas encore la réalité tout entière, ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration nous échappera complètement.

Dans ces édifices compliqués élevés par les maîtres de la Science mathématique, il ne suffit pas de constater la solidité de chaque partie et d'admirer l'œuvre du maçon, il faut comprendre le plan de l'architecte.

Or, pour comprendre un plan, il faut en apercevoir à la fois toutes les parties, et le moyen de tout embrasser dans un coup d'œil d'ensemble, c'est l'intuition seule qui peut nous le donner.

L'Analyse pure met à notre disposition une foule de procédés dont elle nous garantit l'infaillibilité ; elle nous ouvre mille chemins différents où nous pouvons nous engager en toute confiance ; nous sommes assurés de n'y pas rencontrer d'obstacles ; mais, de tous ces chemins, quel est celui qui nous mènera le plus promptement au but ? Qui nous dira lequel il faut choisir ? Il nous faut une faculté qui nous fasse voir le but de loin, et, cette faculté, c'est l'intuition. Elle est nécessaire à l'explorateur pour choisir sa route, elle ne l'est pas moins à celui qui marche sur ses traces et qui veut savoir pourquoi il l'a choisie.

Si vous assistez à une partie d'échecs, il ne vous suffira pas, pour comprendre la partie, de savoir les règles de la marche des pièces. Cela vous permettrait seulement de reconnaître que chaque coup a été joué conformément à ces règles et cet avantage aurait vraiment bien peu de prix. C'est pourtant ce que ferait le lecteur d'un livre de Mathématiques, s'il n'était que logicien. Comprendre la partie, c'est tout autre chose ; c'est savoir pourquoi le joueur avance telle pièce plutôt que telle autre qu'il aurait pu faire mouvoir sans violer les règles du jeu. C'est apercevoir la raison intime qui fait de cette série de coups successifs une sorte de tout organisé. A plus forte raison, cette faculté est-elle nécessaire au joueur lui-même, c'est-à-dire à l'inventeur.

Laissons là cette comparaison et revenons aux Mathématiques.

Voyons ce qui est arrivé, par exemple, pour l'idée de fonction

Digitized by Google

continue. Au début, ce n'était qu'une image sensible, par exemple, celle d'un trait continu tracé à la craie sur un tableau noir. Puis elle s'est épurée peu à peu, bientôt on s'en est servi pour construire un système compliqué d'inégalités, qui reproduisait pour ainsi dire toutes les lignes de l'image primitive; quand cette construction a été terminée, on a *décintré*, pour ainsi dire, on a rejeté cette représentation grossière qui lui avait momentanément servi d'appui et qui était désormais inutile; il n'est plus resté que la construction elle-même, irréprochable aux yeux du logicien. Et cependant si l'image primitive avait totalement disparu de notre souvenir, comment devinerions-nous par quel caprice toutes ces inégalités se sont échafaudées de cette façon les unes sur les autres ?

Vous trouverez peut-être que j'abuse des comparaisons; passez-m'en cependant encore une. Vous avez vu sans doute ces assemblages délicats d'aiguilles siliceuses qui forment le squelette de certaines éponges. Quand la matière organique a disparu, il ne reste qu'une frêle et élégante dentelle. Il n'y a là, il est vrai, que de la silice, mais, ce qui est intéressant, c'est la forme qu'a prise cette silice, et nous ne pouvons la comprendre si nous ne connaissons pas l'éponge vivante qui lui a précisément imprimé cette forme. C'est ainsi que les anciennes notions intuitives de nos pères, même lorsque nous les avons abandonnées, impriment encore leur forme aux échafaudages logiques que nous avons mis à leur place.

Cette vue d'ensemble est nécessaire à l'inventeur; elle est nécessaire également à celui qui veut réellement comprendre l'inventeur; la logique peut-elle nous la donner ?

Non; le nom que lui donnent les mathématiciens suffirait pour le prouver. En Mathématiques, la logique s'appelle *Analyse* et analyse veut dire *division, dissection*. Elle ne peut donc avoir d'autre outil que le scalpel et le microscope.

Ainsi, la logique et l'intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration: l'intuition est l'instrument de l'invention.

Digitized by Google

VI.

Mais, au moment de formuler cette conclusion, je suis pris d'un scrupule.

Au début, j'ai distingué deux sortes d'esprits mathématiques, les uns logiciens et analystes, les autres intuitifs et géomètres. Eh bien, les analystes aussi ont été des inventeurs. Les noms que j'ai cités tout à l'heure me dispensent d'insister.

Il y a là une contradiction au moins apparente qu'il est nécessaire d'expliquer.

Croit-on d'abord que ces logiciens ont toujours procédé du général au particulier, comme les règles de la logique formelle semblaient les y obliger? Ce n'est pas ainsi qu'ils auraient pu étendre les frontières de la Science; on ne peut faire de conquête scientifique que par la généralisation.

Dans un travail imprimé dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, j'ai eu l'occasion d'étudier la nature du raisonnement mathématique et j'ai montré comment ce raisonnement, sans cesser d'être absolument rigoureux, pouvait nous élever du particulier au général par un procédé que j'ai appelé l'*induction mathématique*.

C'est par ce procédé que les analystes ont fait progresser la Science et si l'on examine le détail même de leurs démonstrations, on l'y retrouvera à chaque instant à côté du syllogisme classique d'Aristote.

Nous voyons donc déjà que les analystes ne sont pas simplement des faiseurs de syllogismes à la façon des scholastiques.

Croira-t-on, d'autre part, qu'ils ont toujours marché pas à pas sans avoir la vision du but qu'ils voulaient atteindre? Il a bien fallu qu'ils devinassent le chemin qui y conduisait, et pour cela ils ont eu besoin d'un guide.

Ce guide, c'est d'abord l'analogie.

Digitized by Google

Par exemple, un des raisonnements chers aux analystes est celui qui est fondé sur l'emploi des fonctions majorantes. On sait qu'il a déjà servi à résoudre une foule de problèmes; en quoi consiste alors le rôle de l'inventeur qui veut l'appliquer à un problème nouveau? Il faut d'abord qu'il reconnaisse l'analogie de cette question avec celles qui ont déjà été résolues par cette méthode; il faut ensuite qu'il aperçoive en quoi cette nouvelle question diffère des autres, et qu'il en déduise les modifications qu'il est nécessaire d'apporter à la méthode.

Mais comment aperçoit-on ces analogies et ces différences?

Dans l'exemple que je viens de citer, elles sont presque toujours évidentes, mais j'aurais pu en trouver d'autres où elles auraient été beaucoup plus cachées; souvent il faut pour les découvrir une perspicacité peu commune.

Les analystes, pour ne pas laisser échapper ces analogies cachées, c'est-à-dire pour pouvoir être inventeurs, doivent, sans le secours des sens et de l'imagination, avoir le sentiment direct de ce qui fait l'unité d'un raisonnement, de ce qui en fait pour ainsi dire l'âme et la vie intime.

Causez avec M. Hermite; jamais il n'évoquera une image sensible, et pourtant vous vous apercevrez bientôt que les entités les plus abstraites sont pour lui comme des êtres vivants. Il ne les voit pas, mais il sent qu'elles ne sont pas un assemblage artificiel, et qu'elles ont je ne sais quel principe d'unité interne.

Mais, dira-t-on, c'est là encore de l'intuition. Conclurons-nous que la distinction faite au début n'était qu'une apparence, qu'il n'y a qu'une sorte d'esprits et que tous les mathématiciens sont des intuitifs, du moins ceux qui sont capables d'inventer?

Non, notre distinction correspond à quelque chose de réel. J'ai dit plus haut qu'il y a plusieurs espèces d'intuition. J'ai dit combien l'intuition du nombre pur, celle d'où peut sortir l'induction mathématique rigoureuse, diffère de l'intuition sensible dont l'imagination proprement dite fait tous les frais.

L'abîme qui les sépare est-il moins profond qu'il ne paraît d'abord?

Digitized by Google

Reconnaîtrait-on avec un peu d'attention que cette intuition pure elle-même ne saurait se passer du secours des sens? C'est là l'affaire du psychologue et du métaphysicien et je ne discuterai pas cette question.

Mais il suffit que la chose soit douteuse pour que je sois en droit de reconnaître et d'affirmer une divergence essentielle entre les deux sortes d'intuition ; elles n'ont pas le même objet et semblent mettre en jeu deux facultés différentes de notre âme; on dirait de deux projecteurs braqués sur deux mondes étrangers l'un à l'autre.

C'est l'intuition du nombre pur, celle des formes logiques pures qui éclaire et dirige ceux que nous avons appelés *analystes*.

C'est elle qui leur permet non seulement de démontrer, mais encore d'inventer. C'est par elle qu'ils aperçoivent d'un coup d'œil le plan général d'un édifice logique, et cela sans que les sens paraissent intervenir.

En rejetant le secours de l'imagination, qui, nous l'avons vu, n'est pas toujours infaillible, ils peuvent avancer sans crainte de se tromper. Heureux donc ceux qui peuvent se passer de cet appui! Nous devons les admirer, mais combien ils sont rares!

Parmi les analystes, il y aura donc des inventeurs, mais il y en aura peu.

La plupart d'entre nous, s'ils voulaient voir de loin par la seule intuition pure, se sentiraient bientôt pris de vertige. Leur faiblesse a besoin d'un bâton plus solide et, malgré les exceptions dont nous venons de parler, il n'en reste pas moins vrai que l'intuition sensible est en Mathématiques l'instrument le plus ordinaire de l'invention. A propos des dernières réflexions que je viens de faire, une question se pose que je n'ai le temps, ni de résoudre, ni même d'énoncer avec les développements qu'elle comporterait.

Y a-t-il lieu de faire une nouvelle coupure et de distinguer parmi les analystes ceux qui se servent surtout de cette intuition pure et ceux qui se préoccupent d'abord de la logique formelle?

M. Hermite, par exemple, que je citais tout à l'heure, ne peut être classé parmi les géomètres qui font usage de l'intuition sensible;

Digitized by Google

mais il n'est pas non plus un logicien proprement dit. Il ne cache pas sa répulsion pour les procédés purement déductifs qui partent du général pour aller au particulier.

Je ne puis que soumettre ce nouveau sujet à vos méditations; car l'heure nous presse, et cette conférence est déjà trop longue.

Digitized by Google

UNE PAGE DE LA VIE DE WEIERSTRASS,

EXTRAIT D'UNE COMMUNICATION PLUS ÉTENDUE,

PAR M. G. MITTAG-LEFFLER (STOCKHOLM).

La funeste année 1870, qui causa à deux grands peuples tant de deuils et de larmes, mais qui souleva en même temps et surexcita les passions patriotiques, avait bouleversé les tranquilles habitudes du grand analyste des bords de la Sprée. Weierstrass était alors en passe d'être considéré, tant en Allemagne qu'à l'étranger même, comme le savant qui avait su pénétrer mieux qu'aucun de ses contemporains les énigmes les plus cachées de l'Analyse. Trois ans plus tard, je vins à Paris suivre le cours d'Hermite ; je n'oublierai jamais la stupéfaction que j'éprouvai aux premiers mots qu'il m'adressa : « Vous avez fait erreur, Monsieur, me dit-il ; vous auriez dû suivre les cours de Weierstrass à Berlin. C'est notre maître à tous. » Hermite était Français et patriote ; j'appris du même coup à quel degré aussi il était mathématicien.

Weierstrass avait dû renoncer à son voyage d'été habituel. Il le déplore dans une lettre à Königsberger du 25 octobre 1870 :

Hoffentlich (1) wird das kommende Jahr uns friedfertigen Leuten wenigstens den ungestörten Genuss unserer Ferien gewähren, denen wir nach der Aufregung der Gegenwart doppelt benöthigt sein werden.

Il n'avait commencé ses conférences sur les fonctions elliptiques

(1) Espérons que, l'année prochaine, les gens pacifiques comme nous pourront au moins profiter sans trouble des vacances, dont nous aurons doublement besoin après l'agitation actuelle.

Digitized by Google

que devant vingt auditeurs seulement, alors que, deux ans auparavant, la même conférence en avait réuni cinquante.

Um (1) so schwerer trifft es uns, dass der bis jetzt unbeugsame Wille des hohen Senats uns nicht einmal den Ersatz gönnen mag, der uns aus Ihren Händen in der Person Ihres bisherigen weiblichen Zuhörers geboten wird, und mit den richtigen Gewichts-Coefficienten versehen, vielleicht ein recht werthvoller sein möchte.

Sophie Kowalevski avait été, depuis le printemps de 1869, l'élève de Königsberger à Heidelberg, mais elle avait en même temps écouté les leçons de Helmholtz et de Kirchhoff et aussi fait connaissance avec Bunsen. Avant même d'avoir vingt ans révolus, elle s'était vue transportée dans cette vie intellectuelle et élevée qui avait fasciné ses rêves de jeune fille. Les leçons du disciple (Königsberger est bien en effet un des premiers disciples de Weierstrass) lui avaient inspiré le désir d'aller s'asseoir aux pieds du maître lui-même pour recueillir le savoir de ses propres lèvres. Si Weierstrass a eu plus d'un disciple qu'il a su enflammer par son enseignement, par sa personne même, nul n'apporta en l'approchant un si ardent enthousiasme, une attention aussi fortement tendue que Sophie Kowalevski.

Or, elle avait vingt ans, et, bien qu'elle appartînt à une famille de grande noblesse ayant un grand train de vie, elle n'avait guère plus l'habitude du monde qu'une simple écolière, car l'éclat de sa sœur aînée, de son Anjuta adorée, l'avait toujours fait placer dans l'ombre. C'est avec modestie et non sans émotion qu'elle s'approchait de l'homme qui était à ses yeux le plus grand savant de notre époque et qu'elle avait résolu d'avoir pour maître dans la science des sciences. Elle apportait à sa résolution cette force de volonté qu'elle déployait d'une façon si éclatante aux moments critiques de sa vie. Elle en avait donné une preuve quelques années auparavant,

(1) Ce qui nous est d'autant plus pénible, c'est que le haut Consistoire académique, jusqu'ici inflexible, nous refuse encore la compensation qui s'offre à nous de votre part, dans la personne de la dame qui a été jusqu'à présent votre auditrice: cette compensation affectée de son véritable coefficient d'influence aurait pu avoir peut-être une valeur considérable.

Digitized by Google

lors de son mariage, par la manière même dont elle l'avait conclu. Comment était Sonja (c'est le nom que lui donnèrent toujours ses amis depuis ses années d'études) à cette époque? Nous pouvons nous en faire une idée par une lettre d'une de ses tantes écrite deux ans auparavant, le 28 septembre 1868, et où l'on trouve une description de ses noces :

...und (1) zuletzt erschien Sonja, frisch, glückstrahlend und hübsch, wie man sich eine Braut nur wünschen kann. In Lisa's (2) Zimmer wurde die Brauttoilette vorgenommen : ein einfacher Anzug, in welchem sie aber reizend aussah. Ihre schönen Haare fielen in langen Locken auf den Nacken herab ; ein Kranz von Myrthen und Orangeblüthen war auf dem langen Tüllschleier befestigt. Kein einziges Schmuckstück, nichts von Ausputz, aber ein so grosser Liebreiz, dass alle Anwesenden erklärten, niemals eine so liebliche Braut gesehen zu haben. Der strahlende Ausdruck verliess sie während der ganzen Handlung auf keinen Augenblick, aber es war nicht der Ausdruck einer oberflächlichen Regung sondern die tiefe Ueberzeugung des wahren Glückes.

Si avec tout le reste de la famille à l'exception d'Anjuta, qui avait été du complot, la tante lisait à tort dans « l'expression radieuse » de Sonja le bonheur d'un amour naissant, elle ne se trompait pas en interprétant cette expression comme le reflet, non pas d'un sentiment fugitif, mais d'une intime conviction de vrai bonheur.

Tels étaient l'état d'âme et la physionomie de Sonja au moment où elle s'engageait dans ce pseudo-mariage dont le seul objet était à ses yeux de lui ouvrir toutes grandes les portes de la science des

(1) ...et enfin parut Sonja, fraîche, rayonnant de bonheur et aussi jolie qu'on peut souhaiter une fiancée. Dans la chambre de Lisa elle revêtit sa robe de mariée, une toilette simple, mais dans laquelle elle était ravissante. Ses beaux cheveux tombaient en longues boucles sur sa nuque, et sur le long voile de tulle était fixée une couronne de myrtes et de fleurs d'oranger. Pas un seul bijou, ni de parures, mais tant de grâce que tout le monde déclarait n'avoir jamais vu si aimable fiancée. A aucun instant de la cérémonie elle ne perdit son expression radieuse; et ce n'était pas l'expression d'un sentiment superficiel, mais l'intime conviction du vrai bonheur.

(2) Lisa était la mère.

Digitized by Google

nombres et de l'espace. On se représente aisément d'après cela ce que fut sa première entrevue avec Weierstrass. Elle se présenta le visage recouvert par un grand chapeau rabattu, afin de cacher la timidité de ses vingt ans et l'émotion que lui causait cette épreuve qui, à ses yeux, devait décider de son avenir. Weierstrass ne vit rien de ces yeux merveilleux à l'éloquence desquels nul, quand elle le voulut, n'a pu résister. Il raconte lui-même deux ou trois ans plus tard, à la suite d'une visite à Heidelberg, comment Bunsen, le vieux célibataire endurci, lui aurait dit, sans savoir qu'elle était son élève, que Sonja était « eine gefährliche Frau (1) ». Bunsen aurait ajouté, à l'appui de son dire, qu'il s'était promis de ne jamais admettre de femme dans son laboratoire, et surtout une femme russe; mais Sonja était venue le trouver « und hatte ihn so allerliebst gebeten, dass er nicht habe widerstehen können und seinem Vorsatze ungetreu geworden sei (2) »; il avait alors accordé à une de ses amies et compatriotes le privilège demandé. Il circulait à ce moment des bruits de toutes sortes, et non des plus avantageux, sur le compte des étudiantes russes qui avaient leur principale résidence à Zürich, et Weierstrass n'était guère prédisposé en faveur d'une élève qui appartenait peut-être à cette catégorie tant décriée. Il ne paraît pas avoir eu le moindre pressentiment que Sonja dût être un jour le plus cher de ses disciples, celui qui s'approcherait de lui plus qu'aucun autre. Il demande à Königsberger son opinion sur les aptitudes de l'étrangère aux études mathématiques approfondies et s'inquiète également si « die Persönlichkeit der Dame die erforderlichen Garantieen bietet (3) ». Mais toutefois il se déclare décidé, en cas de réponse favorable, à poser de nouveau, devant le Consistoire académique, la question de l'accès de Mme Kowalevski aux conférences de Mathématiques. Le haut Consistoire demeura inébranlable, et ce n'est que bien des années plus tard, quand Sonja était déjà profes-

(1) Une femme dangereuse.

(2) Et l'avait si gentiment prié qu'il n'avait pu résister et avait été infidèle à sa résolution.

(3) La personnalité de la dame offre les garanties nécessaires.

Digitized by Google

seur à l'Université de Stockholm, qu'elle finit par obtenir, au cours d'une visite faite à Berlin en temps de vacances, d'assister à quelques leçons de Weierstrass.

Cependant aux demandes qu'il s'était vu adresser, Königsberger répondit d'une manière plus que satisfaisante. Mme Kowalevski réitéra ses visites chez Weierstrass, fut moins timide et renonça au chapeau rabattu. Elle avait appris les fonctions elliptiques au cours de Königsberger; Weierstrass lui remit un cahier de ses conférences sur les fonctions hyperelliptiques. Il fut si satisfait de la capacité et de la pénétration qu'elle déploya, qu'il s'offrit à lui faire, à titre privé, le même cours qu'il professait à l'Université.

Elle allait régulièrement chez lui tous les dimanches, l'après-midi, et Weierstrass lui rendait sa visite chaque semaine.

Cet enseignement se continua de l'automne 1870 à l'automne 1874. Weierstrass était souvent empêché par suite de refroidissements fréquents, et en outre Sonja et lui s'absentaient pendant les vacances.

C'est à ces circonstances que l'on doit une série de lettres de Weierstrass à Sonja ; il n'y en a pas moins de quarante et une, la première datée du 11 mars 1871, la dernière du 18 août 1874. S'il en est dans le nombre qui ont un intérêt scientifique, elles ont cependant avant tout l'importance de documents biographiques. On voit les relations se resserrer de plus en plus entre le maître et l'élève, et Sonja finir par jouer un rôle considérable dans la vie de Weierstrass. Quand elle eut quitté Berlin dans l'automne de 1874, la correspondance continua à intervalles plus ou moins longs pendant le reste de ses jours. La dernière lettre de Weierstrass est datée du 5 février 1890. Cette partie de leur correspondance comprend trente-sept lettres, dont un certain nombre ont une grande importance scientifique. De longtemps cependant on ne saurait les publier intégralement, plus d'une opinion et plus d'un jugement y étant formulés sur le compte de personnes encore vivantes. Quant aux lettres de Sophie Kowalevski à Weierstrass, il les brûla toutes après sa mort, ainsi que la plupart des autres lettres qu'il avait

Digitized by Google

reçues, et probablement aussi plus d'un manuscrit mathématique. Après la mort de Sophie Kowalevski, Weierstrass sut que ses lettres étaient entre mes mains et ne fit aucune objection. J'avais cependant déclaré ne vouloir lire ces lettres (je connaissais déjà une partie de celles de la dernière époque par Sonja elle-même) que dans le cas où je survivrais à Weierstrass. C'est pourquoi cette correspondance n'a pas été mise à la disposition d'Anne-Charlotte Leffler, et par là s'explique le peu de place qu'elle donne dans sa biographie aux relations de Sonja avec Weierstrass. Elle ne put en effet ni montrer l'influence capitale de ces relations sur la vie de l'héroïne, ni donner une idée exacte de la valeur mathématique de Sonja.

Je n'entrerai pas ici dans une analyse approfondie de toutes ces lettres. Je réserve cette besogne pour une autre occasion, mais je me permettrai de lire quelques extraits qui sont d'un intérêt tout spécial tant au point de vue scientifique qu'au point de vue de la biographie de Weierstrass.

6 *Mai* 1874 (¹). — In Betreff des am Sonntag besprochenen Gegenstandes kann ich dir jetzt Folgendes mittheilen.

Es sei λ eine reelle Veränderliche und $f(\lambda)$ eine Function derselben, welche nur folgenden Bedingungen unterworfen ist :

1° Sie soll bei *endlichen* Werthen von λ, d. h. wenn man diese Grösse zwischen zwei beliebigen endlichen Grenzen λ_1, λ_2 einschliesst, nicht unendlich gross werden ;

2° Sie kann an beliebig vielen, auch an unendlich vielen Stellen unstetig oder unbestimmt sein, aber in der Art, dass das Integral $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\, d\lambda$,

(¹) 6 *Mai* 1874. — Relativement au sujet discuté dimanche, je puis maintenant te faire part de ce qui suit :

Soit λ une variable réelle et $f(\lambda)$ une fonction de cette variable, assujettie seulement aux conditions suivantes :

1° Pour des valeurs *finies* de λ, c'est-à-dire quand on fait varier cette grandeur entre deux limites finies arbitraires λ_1, λ_2, elle ne peut devenir infinie.

2° Elle peut être discontinue ou indéterminée pour un nombre quelconque de valeurs et même pour une infinité, mais de telle sorte que l'intégrale $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\, d\lambda$

Digitized by Google

unter Zugrundelegung der Riemann'schen Erklärung einen Sinn hat. (S. R's Abhandlung über die Fourier'sche Reihe).

3° Wenn λ sich den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ nähert, so braucht $f(\lambda)$ nicht endlich zu bleiben, muss aber so beschaffen sein, dass

$$\frac{\operatorname{Log}|f(\lambda)|}{\lambda^2}$$

für $\lambda = +\infty$ verschwindet. (Das ist z. B. der Fall, wenn $f(\lambda)$ unendlich wird wie eine positive Potenz von λ oder wie $e^{\alpha\lambda^\beta}$, wo α, β positive Grössen und $\beta < 2$.)

Alsdann gilt folgender Satz. Es seien u, v, w complexe Veränderliche von denen die erste der Bedingung unterwofen ist, dass ihr reeller Theil stets positiv sein soll; so hat das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-(u\lambda^2 + v\lambda + w)} d\lambda$$

bei endlichen Werthen von u, v, w stets einen bestimmten *ebenfalls* endlichen Werth, und ist eine *reguläre Function von* u, v, w. Dieselbe kann also, wenn u', v', w' irgend ein System bestimmter Werthe von u, v, w ist, noch ganzen positiven Potenzen von $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$, in eine Reihe entwickelt werden, welche stets convergirt, wenn u so nahe bei u'

---

ait un sens, dans l'interprétation de Riemann (*voir* le Mémoire de Riemann *Sur la série de Fourier*).

3° Si λ tend vers les limites $-\infty$, $+\infty$, $f(\lambda)$ ne reste pas nécessairement finie, mais doit être telle que

$$\frac{\log|f(\lambda)|}{\lambda^2}$$

s'annule pour $\lambda = +\infty$. [C'est, par exemple, le cas quand $f(\lambda)$ augmente indéfiniment de la même manière qu'une puissance positive de λ, ou comme $e^{\alpha\lambda^\beta}$, α et β étant positifs et $\beta < 2$].

On a alors le théorème suivant: « Soient u, v, w des variables complexes dont la première est assujettie à ce que sa partie réelle reste constamment positive; l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-(u\lambda^2 + v\lambda + w)} d\lambda$$

a alors pour des valeurs finies de u, v, w une valeur bien déterminée et *également* finie et elle est une *fonction régulière de* u, v, w. Si u', v', w' désignent un système quelconque de valeurs déterminées de u, v, w, elle peut être développée en série suivant les puissances entières et positives de $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$, cette série étant toujours convergente, si u est assez voisin de u' pour que toutes les

Digitized by Google

angenommen wird, dass in allen andern Werthen dieser Grösse, die denselben Abstand von u' haben, der reelle Theil positiv ist.

Diese Reihe wird ferner erhalten, wenn man

$$f(\lambda)e^{-(u\lambda^2+v\lambda+w)}$$

nach Potenzen von $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$ entwickelt und darauf jeden Coefficienten der so entstehenden Reihe von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt.

Dieser Satz angewandt auf das Integral

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4t}} d\lambda$$

lehrt, dass dasselbe, wenn die Grösse t der Bedingung unterworfen wird, dass ihr reeller Theil stets positiv sei $\left(\text{also auch der von } \frac{1}{t}\right)$, während x unbeschränkt veränderlich ist, in eine beständig convergirende Reihe von der Form

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} [\varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \ldots + \varphi_n(t)x^n + \ldots]$$

entwickelt werden kann, wo $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, ..., reguläre Functionen von t

---

valeurs de cette quantité, dont la différence avec u' a le même module, aient leur partie réelle positive.

» *De plus, cette série s'obtient en développant*

$$f(\lambda)e^{(-u\lambda^2+v\lambda+w)}$$

suivant les puissances de $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$ et en intégrant ensuite de $-\infty$ à $+\infty$ chaque coefficient de la série ainsi obtenue.

» Ce théorème, appliqué à l'intégrale

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4t}} d\lambda.$$

montre le fait suivant : si la quantité t est soumise à la condition que sa partie réelle soit toujours positive $\left(\text{et par suite aussi celle de } \frac{1}{t}\right)$, tandis que x varie sans limitation, cette intégrale peut être développée en une série uniformément convergente, de la forme

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} [\varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \ldots + \varphi_n(t)x^n + \ldots]$$

où $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, ... sont des fonctions régulières de t. En outre, $\varphi(x, t)$ satisfait

Digitized by Google

sind. Es genügt ferner $\varphi(x, t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}$$

in dem ganzen Bereich (x, t), für welchen die Function definirt ist.

Der Beweis der aufgestellten Satzes ist sehr einfach; auch lässt sich ein viel allgemeinerer begründen, der zeigt, wie aus ganz willkürlichen Functionen einer reellen Veränderlichen analytische Functionen complexer Grössen abgeleitet werden können. Ueber alles dies und manches daran sich knüpfende mündlich Weiteres und Näheres.

Du siehst, theuerste Sonia, wie deine Dir so einfach scheinende Bemerkung über die Eigenthümlichkeit partieller Differentialgleichungen, dass eine unendliche Reihe, welche einer solchen D. Gl. *formell* genügen kann, ohnedoch für irgend welche Werthsysteme ihrer Veränderlichen zu convergiren, für mich der Ausgang von Untersuchungen, die viel Interessantes haben und manche Aufklärung verschaffen geworden ist. Ich wünsche, dass meine Schülerin auf diese Weis, fortfahren möge, Ihrem Lehrer und Freund Ihren Dank zu bethätigen.

Quelquefois des envieux ont essayé de faire croire que Sonja, en rédigeant sa Thèse de doctorat, n'avait pas été aussi indépendante qu'elle aurait dû l'être, et qu'elle devait à Weierstrass plus qu'elle n'avouait elle-même.

Les propres paroles du Maître nous sont aujourd'hui une preuve du contraire.

à l'équation différentielle

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}$$

dans tout le domaine (x, t) pour lequel la fonction est définie. »

La démonstration du théorème énoncé est très simple; on peut même en établir un beaucoup plus général, qui montre comment on peut, de fonctions tout à fait arbitraires d'une variable réelle, déduire des fonctions analytiques de grandeurs complexes. De tout cela et de beaucoup d'autres choses qui s'y rattachent, nous causerons prochainement.

Tu vois, très chère Sonia, comment ta remarque, qui te paraissait si simple, sur la propriété d'équations aux dérivées partielles d'être satisfaites *formellement* par une série infinie, sans que celle-ci converge pour aucun système de valeurs de ses variables, est devenue pour moi le point de départ de recherches qui ont beaucoup d'intérêt et expliquent bien des choses. Je souhaite que mon élève continue de cette manière à témoigner ses remercîments à son maître et ami.

Digitized by Google

La démonstration que l'équation différentielle

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2}$$

est satisfaite formellement par une série de puissances qui ne converge pour aucun système de valeurs des variables indépendantes était une des parties les plus originales de la Thèse et était à cette époque une découverte de haute importance.

9 *Mai* 1874 (¹). — Eine kleine Aufgabe. Die p. D. Gl.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

hat ein particuläres Integral

$$\varphi = (\mu t)^{-\nu} F(u), \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\mu t}}(x - \lambda),$$

wo λ, μ, ν willkürliche Constanten bezeichnen, und $F(u)$ der Diff. Gl.

$$F''(u) + \frac{1}{2}\mu u F'(u) + \mu \nu F(u) = 0$$

genügen muss. Welches ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung?

Für

$$\mu = 1, \qquad \nu = \frac{1}{2}$$

(¹) 9 *Mai* 1874. — Un petit problème. L'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

a une intégrale particulière

$$\varphi = (\mu t)^{-\nu} F(u), \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\mu t}}(x - \lambda),$$

où λ, μ, ν désignent des constantes arbitraires, et $F(u)$ une solution de l'équation différentielle

$$F''(u) + \frac{1}{2}\mu u F'(u) + \mu \nu F(u) = 0.$$

Quelle est la solution générale de cette équation?

Pour

$$\mu = 1, \qquad \nu = \frac{1}{2}$$

Digitized by Google

kann man setzen

$$F(u) = f(\lambda) e^{-\frac{u^2}{4}}$$

und erhält aus dem part. Integral

$$\varphi = \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{4}\frac{(x-\lambda)^2}{t}}$$

das allgemeine

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{4}\frac{(x-\lambda)^2}{t}} d\lambda.$$

Wenn aber $f(\lambda)$ für unendlich grosse Werthe von λ in stärkerem Maasse unendlich wird, wie die Function

$$e^{-c\lambda^2}$$

bei beliebig kleiner Constante c, so hat der vorstehende Ausdruck keinen Sinn. Bekommt man vielleicht in diesem Falle durch Anwendung einer allgemeinen Function $F(u)$, die der aufgestellten D. Gl. bei anderen Werthen der Constanten genügt, einen brauchbaren Ausdruck? Oder ist die willkürliche Function *nothwendig* an die Beschränkung gebunden, dass

$$\frac{\operatorname{Log} |f(\lambda)|}{\lambda^2} = 0$$

werden muss für $\lambda = \pm \infty$?

---

on peut poser

$$F(u) = f(\lambda) e^{-\frac{u^2}{4}}$$

et de l'intégrale particulière

$$\varphi = \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{4}\frac{(x-\lambda)^2}{t}}$$

on déduit la générale

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\lambda)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{4}\frac{(x-\lambda)^2}{t}} d\lambda.$$

Mais si, pour des valeurs infinies de λ, $f(\lambda)$ croît indéfiniment et plus vite que la fonction

$$e^{-c\lambda^2},$$

où c est une constante aussi petite que l'on veut, l'expression précédente n'a plus aucun sens. Peut-être, dans ce cas, en employant une fonction générale $F(u)$ satisfaisant à l'équation différentielle écrite plus haut, pour d'autres valeurs des constantes, peut-on parvenir à une expression utilisable? Ou bien la fonction arbitraire est-elle *nécessairement* assujettie à la restriction que pour $\lambda = \pm \infty$, l'on ait

$$\frac{\log |f(\lambda)|}{\lambda^2} = 0?$$

Digitized by Google

Il convient de rapprocher de ces lettres le passage suivant qui se trouve dans une lettre à Sonja du 27 décembre 1883, et où Weierstrass lui donne certains conseils relativement à un cours projeté par elle sur les équations différentielles partielles :

Dagegen (1) würde ich Dir sehr anrathen, einige partielle D. Gl. aus dem Gebiete der math. Physik ausführlicher zu behandeln, obwohl deren Integration mit dem ersten Theil Deiner Vorlesung kaum etwas gemein hat. In Riemann's und Dirichlet's Vorlesungen findest Du Beispiele. Namentlich ist von grossem Interesse die Gl.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Wenn mann annimmt, dass für

$$t = 0, \qquad \varphi = f(x)$$

gegeben sei, so kann $f(x)$ eine ganz willkürliche, nur integrabele Function sein, und dann wird $\varphi(t, x)$ für jeden *positiven* Werth von t eine analytische Function von x, lässt sich aber nich für *negative* Werthe von t definiren, wobei an die Eigenthümlichkeit dieser D. Gl., welche Du in Deiner Dissertation bemerkt hast, erinnert werden kann. Der enorme Unterschied in dem Charakter der beiden äusserlich so verwandten D. Gl.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

ist sehr frappant und belehrend.

---

(1) Par contre, je te conseillerai vivement de traiter de quelques équations aux dérivées partielles du domaine de la Physique mathématique, bien que leur intégration ait peu de rapports avec la première partie de ton cours. Dans les leçons de Riemann et de Dirichlet tu trouveras des exemples. En particulier l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

est d'un grand intérêt.

Si l'on suppose que pour

$$t = 0, \qquad \varphi = f(x)$$

soit donnée, $f(x)$ peut être une fonction tout à fait arbitraire, seulement assujettie à la condition d'être intégrable, et alors, pour toute valeur *positive* de t, $\varphi(t, x)$ devient une fonction analytique de x; mais elle ne peut se définir pour les valeurs *négatives* de t, et l'on peut rappeler ici la propriété de cette équation différentielle que tu as remarquée dans ta thèse. L'énorme différence des caractères des deux équations différentielles

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

si analogues en apparence, est très frappante et très instructive.

Digitized by Google

Il faut comparer encore la dernière partie du Mémoire de Weierstrass : *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Zweite Mittheilung.* (*Math. und Naturw. Mitth. aus den Sitzungsb. der Königl Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin.* 1885, 30 *juli.*)

23 *October* 1875 (¹). — Ich habe einen schönen Satz, der ganz allgemein für die Zurückführbarkeit eines Integrals von beliebigen Range auf eins von niedrigerem Range ein noth wendiges und hinreichendes Kriterium ausspricht.

15 *Augusti* 1878 (²). — Meine eigentlichen Untersuchungen angehend, so haben die über die $2n$-fach periodischen Functionen, oder besser gesagt, die Systeme von n Functionen ebenso vieler Argumente, für die ein algebraisches Additionstheorem besteht, endlich einen Abschluss gefunden, der mich befriedigt, so dass ich jetzt mit der Veröffentlichung vorgehn werde. Ich muss dabei freilich ziemlich mit dem Ende anfangen, aus äussern Gründen, weil man nämlich auch in Frankreich jetzt anfängt, sich mit den periodischen Functionen mehrerer Veränderlichen zu beschäftigen. Der Beweis dafür, dass alle eindeutigen Functionen von n Veränderlichen, wenn sie bei endlichen Werthen ihrer Argumente wie rationale Functionen sich verhalten und $2n$ von einander unabhängige Perioden-Systeme besitzen, sich durch Θ Functionen ausdrücken lassen, hoffe ich noch in diesen Ferien druckfertig machen zu können. Für das Uebrige habe ich umfangreiche Ausarbeitungen in meinem Besitze.

(¹) 23 *Octobre* 1875. — J'ai un beau théorème, qui donne d'une manière tout à fait générale les conditions nécessaires et suffisantes de réduction d'une intégrale de rang quelconque à une autre de rang inférieur.

(²) 15 *Août* 1878. — En ce qui concerne mes recherches personnelles, j'ai enfin terminé d'une manière satisfaisante celles qui concernent les fonctions à $2n$ périodes, ou, pour mieux dire, les systèmes de n fonctions du même nombre n d'arguments, pour lesquelles existe un théorème algébrique d'addition, de sorte que je vais pouvoir m'occuper maintenant de leur publication. A vrai dire, je suis obligé de commencer presque par la fin, pour des motifs étrangers au sujet, parce que l'on commence aussi en France à s'occuper maintenant des fonctions périodiques de plusieurs variables. Pour la possibilité d'exprimer par des fonctions Θ toutes les fonctions uniformes de n variables qui se comportent comme des fonctions rationnelles pour des valeurs finies de leurs arguments et qui possèdent $2n$ systèmes indépendants de périodes, j'espère que je pourrai encore en livrer la démonstration à l'impression pendant ces vacances. Pour le reste, j'ai déjà en ma possession de volumineuses rédactions.

Digitized by Google

Ces volumineuses rédactions ont toutes disparu. En revanche il se trouve dans le troisième volume des Œuvres de Weierstrass une preuve du théorème :

Jede (1) eindeutige Function von n Argumenten, welche bei endlichen Werthen der letztern den Charakter einer rationalen Function besitzt und zugleich $2n$-fach periodisch ist, entspringt in der beschriebenen Weise (dans une introduction au traité) aus einer Θ Function derselben Veränderlichen.

Il est intéressant de comparer cette communication avec le passage suivant qui se trouve dans une lettre de Sophie Kowalevski à moi-même du 8 janvier 1881 :

Je commencerai ma lettre aujourd'hui par vous parler de M. Weierstrass. J'ai eu le plaisir de le trouver en bonne santé, mais accablé d'ouvrage qui, à mes yeux du moins, aurait tout aussi bien pu être rempli par quelque mathématicien plus jeune, dont le temps n'est pas encore aussi précieux. Son Cours, qu'il lit maintenant tous les jours, et devant un auditoire de deux cent cinquante personnes, la revision de l'édition des Œuvres de Jacobi et de Steiner, les différents Academie-Senats-Facultätssitzungen et autres remplissent sa journée au point de lui rendre la terminaison de ses propres recherches presque impossible, surtout en vue de son âge déjà assez avancé et de sa santé, qui ne lui permet pas de se fatiguer impunément. Je ne comprends vraiment pas comment les autres mathématiciens de Berlin ne parviennent pas à faire comprendre au ministre combien il serait nécessaire de délivrer M. Weierstrass, pour un temps du moins, de toute occupation extérieure et de lui assurer les moyens de se livrer pendant une année exclusivement à la publication de ses Œuvres. Sous ce rapport aussi la mort de M. Borchardt est un bien grand malheur, car c'était, je crois, le seul des amis influents de Weierstrass qui prenait vraiment à cœur ses intérêts, qui sont aussi ceux de la Science. C'est vraiment par trop regrettable que nous ne verrons peut-être jamais un exposé complet de sa théorie des fonctions abéliennes, car je trouve qu'un des plus grands mérites de Weierstrass consiste justement dans l'unité de sa méthode et dans la

(1) Toute fonction uniforme de n arguments, qui, pour les valeurs finies de ceux-ci, possède le caractère d'une fonction rationnelle, et qui admet $2n$ périodes, se déduit, ainsi qu'il a été exposé (dans une introduction au Traité), d'une fonction Θ des mêmes variables.

Digitized by Google

manière aussi naturelle que logique dont il déduit toute la théorie d'un seul théorème fondamental et la présente vraiment comme un *tout* organique; et c'est justement ce côté-là de son génie qui se perd complètement de vue à la publication de ses recherches par fragments, comme il l'a fait jusqu'à présent, et qui n'est justement apprécié que par un petit nombre de ses élèves. N'est-ce pas étonnant vraiment comme, à l'heure qu'il est, la théorie des fonctions abéliennes avec toutes les particularités de la méthode qui lui sont propres et qui en font justement une des plus belles branches de l'Analyse, est encore peu étudiée et peu comprise partout ailleurs qu'en Allemagne? J'ai été vraiment indignée en lisant, par exemple, le *Traité des fonctions abéliennes* par Briot, qui jusqu'à présent ne m'était pas tombé sous les yeux. Peut-on exposer une aussi belle matière d'une manière aussi aride et aussi peu profitable pour l'étudiant? Je ne m'étonne presque plus que nos mathématiciens russes, qui ne connaissent toute cette théorie que par le livre de Neumann et celui de Briot, professent une indifférence aussi profonde pour l'étude de ces fonctions. Me croirez-vous, par exemple, quand je vous dirai que j'ai eu à soutenir, il y a peu de temps, une discussion très vive contre plusieurs professeurs de Mathématique de l'Université de Moscou, qui prétendaient que les fonctions abéliennes ne s'étaient encore montrées capables d'aucune application sérieuse, et que toute cette théorie était encore embrouillée et aride au point d'être tout à fait impropre à servir de sujet à un cours universitaire?

11 *April* 1882 (¹). — Hast du Notiz genommen von den neuesten Arbeiten Poincaré's? Der ist jedenfalls ein bedeutendes mathematisches Talent, so wie überhaupt jetzt in Frankreich wieder eine junge Generation von Mathematikern mit dem besten Erfolg bemüht ist, auch auf dem Gebiete der Analysis, deren einziger Vertreter, nachdem Liouville sich von ihr abgewandt hatte, lange Zeit nur Hermite war, Eroberungen zu machen. Die von Poincaré in Anschluss an Arbeiten von Fuchs, Schwarz und Klein begonnenen Untersuchungen werden jedenfalls zu neuen analytischen Transcendenten führen, wenn er auch vielleicht jetzt noch

(¹) 11 *Avril* 1882. — As-tu pris connaissance des derniers travaux de Poincaré? C'est à coup sûr un talent mathématique considérable; aussi bien, il y a maintenant en France une nouvelle génération de jeunes mathématiciens qui s'efforcent avec le plus grand succès de faire des conquêtes dans le domaine de l'Analyse elle-même, dont le seul pionnier fut longtemps Hermite, depuis l'abandon de Liouville. Les recherches commencées par Poincaré, se rattachant aux travaux de Fuchs, Schwarz et Klein, conduiront certainement à de nouvelles transcendantes analy-

Digitized by Google

nicht ganz auf dem richtigen Wege ist. Es ist nur zu beklagen, dass den jungen französischen Forschern die Akademie ein zu verlockendes Ziel ist. Jede Woche einen Artikel in die *Comptes rendus* zu bringen, der wirklich Werth hat, das ist doch unmöglich.

14 *Juni* 1882 (¹). — Mit den andern Matematikern (*) wirst Du nun wohl auch in Verkehr treten müssen, die jüngern, Appell, Picard, Poincaré werden Dich am meisten interessiren. Poincaré ist nach meiner Ansicht von allen der zur mathematischen Speculation berufenste, möge er nur sein ungewöhnliches Talent nicht zu sehr zersplittern und seine Untersuchungen reifen lassen. Die Theoreme über algebraische Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen un düber die linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, welche er in den *Comptes rendus* gegeben hat, sind wahrhaft imponirend; sie eröffnen der Analysis neue Wege, welche zu unerwarteten Resultaten führen werden. Gleichwohl bin ich der Ueberzeugung, dass die neue Behandlungsweise der in Rede stehenden Gleichungen, in ihren Grundgedanken richtig, doch noch von verallgemeinerten, höhern Gesichtspunkten aus wird unternommen werden müssen. Gestatte mir, dies etwas genauer auszuführen. Wenn eine algebraische Gleichung $f(x,y) = 0$ gegeben ist, so sagt Poincaré, dass alle dieser Gleichung befriedigende Werthsysteme xy

---

tiques, même s'il n'est pas encore maintenant tout à fait sur la voie exacte. Il n'y a qu'à regretter que l'Académie soit pour les jeunes savants français un but si séduisant. Donner chaque semaine dans les *Comptes rendus* un article qui ait une réelle valeur, c'est cependant impossible.

(¹) 14 *Juin* 1882. — Il faudra bien aussi que tu entres maintenant en rapport avec les autres mathématiciens (*); les jeunes, Appell, Picard, Poincaré, t'intéresseront extrêmement. Poincaré est, selon moi, de tous le plus remarquablement doué pour les spéculations mathématiques; puisse-t-il seulement ne pas trop éparpiller son rare talent et laisser mûrir ses recherches. Les théorèmes qu'il a donnés dans les *Comptes rendus* sur les relations algébriques entre deux variables et sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques sont véritablement imposants; ils ouvrent à l'Analyse de nouvelles voies qui conduiront à des résultats inattendus.

Je suis néanmoins convaincu que la nouvelle manière de traiter les relations en question, exacte dans son point de départ, devra être tentée en se plaçant encore à des points de vue plus généraux et plus élevés. Permets-moi de m'expliquer d'une manière un peu plus précise. Étant donnée une relation algébrique $f(x,y) = 0$. Poincaré dit que tous les systèmes de valeurs x, y, liés par cette relation peuvent

(*) Sonja avait raconté à Weierstrass qu'elle venait de faire la connaissance de M. Hermite.

Digitized by Google

sich darstellen lassen in der Form

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

wo $\varphi(t)$, $\psi(t)$ eindeutige Functionen der unabhängigen Veränderlichen t bezeichnen, deren Bereich ein beschränkter oder unbeschränkter sein kann. Diese Functionen haben nun die Eigenschaft, dass sie unverändert bleiben, wenn für t gewisse lineare Functionen derselben Grösse gesetzt werden. Die Coefficienten der letztern aus den gegebenen Werthen der Coefficienten der Gl. $f(x,y)$ zu bestimmen, ist jedenfalls eine äusserst schwierige Aufgabe, die im Allgemeinen auf transcendente Gleichungen complicirtester Natur führen wird. Wenn die Coefficienten von $f(x,y)$ rationale oder algebraische Functionen von unbestimmen Grössen $a, b, \ldots$ sind, so wird offenbar die vollständige Bestimmung von $\varphi(x)$, $\psi(x)$ anders und anders sich gestalten, jenachdem jene willkürlichen Constanten so oder so in der Gleichung vorkommen.

Verfolgt man diesen Gedanken so wird man nothwendig zu folgender Aufgabe gelangen :

Es sei gegeben eine algebraische Gleichung zwischen $n+1$ Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ mit rationalen Zahl-Coefficienten. Man soll versuchen, alle diese Gleichung befriedigenden Werth-Systeme $(x, x_1, \ldots, x_n)$ in der Form

$$x = \varphi(t_1, \ldots, t_n), \qquad x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_n), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_n)$$

dergestalt darzustellen, dass $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eindeutige Functionen der unab-

---

être mis sous la forme

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

$\varphi(t)$ et $\psi(t)$ désignant des fonctions uniformes de la variable indépendante t, dont le domaine peut être limité ou illimité. Ces fonctions ont la propriété de rester inaltérées, si l'on substitue à t certaines fonctions linéaires de t. Quant à déterminer les coefficients de ces dernières au moyen des valeurs données des coefficients de l'équation $f(x,y) = 0$, c'est un problème extrêmement difficile, qui conduira en général à des équations transcendantes de la nature la plus compliquée. Si les coefficients de $f(x,y)$ sont des fonctions rationnelles ou algébriques de quantités indéterminées $a, b, \ldots$, la détermination complète de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ s'effectuera évidemment par des procédés tout différents, selon la manière dont ces constantes arbitraires figurent dans l'équation.

En poursuivant ces réflexions, on arrive nécessairement au problème suivant :

Soit donnée une relation algébrique, entre $n+1$ variables, $x, x_1, \ldots, x_n$, à coefficients numériques rationnels. Chercher à mettre tous les systèmes de valeurs $(x, x_1, \ldots x_n)$ liés par cette relation sous la forme

$$x = \varphi(t_1, \ldots, t_n), \qquad x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_n) \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t_1, \ldots; t_n),$$

de telle sorte que $\varphi, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ soient des fonctions uniformes des variables indépen-

Digitized by Google

hängigen Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sind. [Das kann z. B. ausgeführt werden, wenn die Gl. $y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$ gegeben ist indem man dann x, y, k durch die Function $\vartheta_\lambda(v, \tau)$ auszudrücken im Stande ist]. Bei dieser Untersuchung wird man bestrebt sein müssen, unter den algebraischen Gleichungen diejenigen aufzufinden, welche man Muttergleichungen nennen kann, von denen jede einen besondern Affect besitzt, und auf welche die übrigen zurückgeführt werden können. Zunächst aber wird es die Aufgabe sein, Functionen mehrerer Veränderlichen zu bestimmen, welche ähnliche Eigenschaften haben, wie die von Poincarré « fonctions fuchsiennes » genannten, von denen die Quotienten der Functionen $\vartheta_\lambda(v_1, \ldots, v_n \tau_{11}, {}_{12}\tau, \ldots, \tau_{nn})$ als Functionen der v und τ angesehn ein Beispiel geben. Das sind sehr weitgehende Perspectiven, aber man muss sich klar machen, welches die Endziele der von Poincaré so glänzend begonnenen Untersuchungen nothwendig sein müssen.

In Betreff der P'schen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen gilt das Vorstehende selbstverständlich in erhöhtem Masse.

27 *August* 1883 (¹). — Unter den ältern Mathematikern giebt es verschiedene Sorten von Menschen, ein trivialer Satz, der aber doch vieles erklärt. Mein lieber Freund Kummer z. B. hat in der Zeit, wo er seine ganze Kraft an die Auffindung der Beweise für die höheren Reciprocitätsgesetze setzte, sich nicht und nachher, nachdem er sie daran erschöpft,

---

dantes $t_1, t_2 \ldots, t_n$. [On y arrive par exemple, pour l'équation

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$

en mesure d'exprimer x, y, k au moyen de la fonction $\vartheta_\lambda(v, \tau)$]. Dans cette recherche on devra s'efforcer de trouver, parmi les équations algébriques, celles qu'on peut appeler *équations mères*, dont chacune possède un affect particulier, et auxquelles on puisse ramener toutes les autres. Mais le premier de tous les problèmes sera de déterminer des fonctions de plusieurs variables, ayant des propriétés analogues à celles que Poincaré appelle *fonctions fuchsiennes*, et dont un exemple est fourni par les quotients des fonctions $\vartheta_\lambda(v_1, v_2 \ldots, v_n, \tau_{11}, \tau_{12} \ldots, \tau_{nn})$ considérées comme fonctions des v et des τ. Ce sont là des perspectives très étendues, mais on doit tâcher de voir clairement quel doit être nécessairement le but final des recherches si brillamment commencées par Poincaré.

Quant aux recherches de Poincaré sur les équations différentielles linéaires, il est bien clair que ce qui précède s'y applique dans une mesure encore plus étendue.

(¹) 27 *Août* 1883. — Parmi les mathématiciens les plus avancés en âge, il y a diverses catégories de personnes; proposition banale, il est vrai, mais qui explique bien des choses. Mon cher ami Kummer, par exemple, aussi bien à l'époque où il dépensait toute son énergie dans la recherche de démonstration des lois de réciprocité supérieures que plus tard, et maintenant qu'il l'a épuisée sur ce sujet, ne

Digitized by Google

erst recht nicht mehr um das, was auf mathematischen Gebiete geschehen ist, gekümmert; er verhält sich, wenn nicht ablehnend, doch gleichgültig dagegen. Wenn Du ihm sagst, die Euclid'sche Geometrie fusse auf einem unbewiesenen Grundsatze, so giebt er Dir das zu; von dieser Einsicht ausgehend aber nunmehr die Frage so zu stellen : Wie gestaltet sich denn die Geometrie ohne diesen Grundsatz? Das ist seiner Natur zuwider, die darauf gerichteten Bemühungen und die daran sich reihenden allgemeinen, von dem empirisch Gegebenen oder Angenommenen sich los machenden Untersuchungen sind ihm müssige Speculationen oder gar ein Gräuel. Kronecker ist anders, er macht sich mit allem Neuen rasch bekannt, sein leichtes Auffassungsvermögen befähigt ihn dazu, aber es geschieht nicht in eindringender Weise er besitzt nicht die Gabe, sich mit einer guten fremden Arbeit mit dem gleichen wissenschaftlichen Interesse wie mit einer eigenen Untersuchung zu beschäftigen.

Dazu kommt ein Mangel, der sich bei vielen höchst verständigen Menschen, namentlich bei denen semitischen Stammes findet, er besitzt nicht ausreichend Phantasie (Intuition möchte ich lieber sagen) und es ist wahr, ein Mathematiker, der nicht etwas Poet ist, wird nimmer ein vollkommener Mathematiker sein. Vergleiche sind lehrreich : Der allumfassende auf das höchste, das Ideale gerichtete Blick zeichnet Abel vor Jacobi, Riemann vor allen seinen Zeitgenossen (Eisenstein, Rosenhain),

---

se souciait et ne se soucie plus vraiment de ce qui se passe dans les divers domaines mathématiques; ou bien il se récuse, ou bien cela le laisse indifférent. Si tu lui dis que la Géométrie euclidienne repose sur un principe non démontré, il te l'accorde; mais alors, quoique admettant ce point de vue, il répugne à sa nature de poser ainsi la question : Comment se comporte alors la Géométrie sans ce principe? Les efforts dirigés dans ce sens et les recherches générales qui se sont succédé en vue de s'affranchir de données empiriques ou d'axiomes sont pour lui des spéculations oiseuses, voire même une abomination. Kronecker est tout autre : il a vite fait de prendre connaissance de tout ce qui est nouveau, sa facile puissance de conception le rend apte à cette assimilation, mais cela n'a pas lieu d'une manière profonde; il ne possède pas le don de s'occuper d'un travail fait par une autre personne avec le même intérêt scientifique que s'il s'agissait de ses propres recherches.

A cela s'ajoute une imperfection qu'on rencontre chez beaucoup d'hommes extrêmement intelligents, notamment chez ceux de race sémite; il n'a pas assez de fantaisie (je devrais plutôt dire d'intuition), et il est certain qu'un mathématicien qui n'est pas un peu poète ne sera jamais un mathématicien complet. Les comparaisons sont instructives; les vues d'ensemble embrassant tout et dirigées vers les sommets les plus élevés, vers l'idéal, placent d'une manière éclatante Abel avant Jacobi, de même Riemann avant ses contemporains (Eisenstein, Rosenhain), et

Digitized by Google

Helmholtz vor Kirchhoff aus (obwohl bei dem letztern kein Tröpfchen semitischen Blutes vorhanden) in ganz eclatanter Weise aus.

Uebrigens habe ich, was meine wissenschaftlichen Bestrebungen angeht, von denen ich reden darf in dem Bewusstsein, dass sie, so wenig sie in dem Entwicklunsgang der Wissenschaft bedeuten mögen, stets nur dem Dienste derselben gewidmet gewesen sind; so habe ich längst darauf verzichtet, bei älteren Collegen denselben Eingang zu verschaffen; es ist die Jugend, an die ich mich gewandt, und bei der ich auch vielfach Verständniss und begeistertes Eingehn gefunden habe.

24 *März* 1885 (¹). — Zu der grossen Anzahl von Zuhörern gratulire ich Dir von Herzen; freilich wirst Du auch wohl die Erfahrung machen, dass bei vielen der Wille gut aber das Vermögen schwach ist, so dass man selbst bei den Ausdauernden nicht sicher sein kann, ob das Interesse an der Sache oder Pflichttreue sie hält. Könnte man immer einen Kreis von höchstens zwölf talentvollen, wohl vorbereiteten und für ihre Wissenschaft begeisterten Zuhörern um sich versammelt haben, so wäre das akademische Lehramt die lohnendste und interessanteste Beschäftigung in der Welt. Dazu muss freilich noch eins kommen, dessen ich immer mehr und mehr entbehren muss, ein einträchtiges, auf Uebereinstimmung in den Principen und gegenseitiger aufrichtiger Anerkennung beruhendes Zusammenwirken mit den Fachgenossen....

Während ich sage, dass eine sog. irrationale Zahl eine so reelle Existenz

---

Helmholtz avant Kirchhoff (bien que chez ce dernier n'existe aucune goutte de sang sémite).

En ce qui concerne du reste mes tendances scientifiques, dont je puis parler avec la conscience que, si peu qu'elles aient contribué au développement de la Science, elles ont toujours été consacrées uniquement à son service, en ce qui concerne mes tendances, dis-je, j'ai renoncé depuis longtemps à les faire accepter par des collègues plus âgés que moi; c'est vers la jeunesse que je me suis tourné, et chez elle j'ai rencontré beaucoup d'intelligence et un accueil enthousiaste.

(¹) 24 *Mars* 1885. — Au sujet du grand nombre de tes auditeurs, je te félicite de tout cœur; à vrai dire, tu feras aussi l'expérience que pour beaucoup d'entre eux la volonté est bonne, mais les facultés médiocres, de sorte que, même pour les plus persévérants, on n'est jamais certain si c'est l'intérêt à la question qui les retient ou la fidélité au devoir. Si l'on pouvait toujours avoir réuni autour de soi un cercle d'au plus une douzaine d'auditeurs remplis de talent, bien préparés et passionnés pour leur science, l'enseignement académique serait l'occupation la plus enviable et la plus intéressante du monde. A la vérité, il faut encore y ajouter une chose dont je dois me passer toujours de plus en plus : c'est la collaboration avec ses collègues, basée sur la concorde, l'accord dans les principes et une sincère approbation réciproque.

Tandis que je dis qu'un nombre dit *irrationnel* possède une existence aussi réelle

Digitized by Google

habe wie irgend etwas anderes in der Gedankenwelt, ist es bei Kronecker jetzt ein Axiom, dass es nur Gleichungen zwischen ganzen Zahlen giebt....

Schlimmer ist es aber, wenn Kronecker seine Autorität dafür einsetzt, dass *alle*, die bis jetzt an der Begründung der Functionentheorie gearbeitet haben, Sünder vor dem Herrn sind. Wenn ein wunderlicher Kauz wie Christoffel sagt, in 20-30 Jahren wird die jetzige Functionentheorie zu Grabe getragen und die ganze Analysis in die Theorie der Formen aufgegangen sein, so beantwortet man das mit einem Achselzucken. Wenn aber Kronecker den Ausspruch thut, den ich *wörtlich* wiederhole : « Wenn mir noch Jahre und Kräfte genug bleiben, werde ich selber der mathematischen Welt zeigen, dass nicht nur die Geometrie, sondern auch die Arithmetik der Analysis die Wege weisen kann, und sicher die strengeren. Kann ich es nicht mehr thun, so werden's die thun, die nach mir kommen... und sie werden auch die Unrichtigkeit *aller* jener Schlüsse erkennen, mit denen jetzt die *sogenannte* Analysis arbeitet »; so ist ein solcher Ausspruch von einem Manne, dessen hohe Begabung für mathematische Forschung und eminente Leistungen von mir sicher ebenso aufrichtig und freudig bewundert werden wie von allen seinen Fachgenossen, nicht nur beschämend für diejenigen, denen zugemuthet wird, dass sie als Irrthum anerkennen und abschwören sollen, was den Inhalt ihres unablässigen Denkens und Strebens ausgemacht hat, sondern ist es auch ein directer Appell an die jüngere Generation, ihre bisherigen Führer zu verlassen und um ihn als

---

que n'importe quel autre dans le domaine de la pensée, c'est maintenant pour Kronecker un axiome qu'il n'y a que des équations entre nombres entiers...

Mais le pis est que Kronecker emploie son autorité à soutenir que tous ceux qui ont travaillé jusqu'ici à fonder la théorie des fonctions sont des pécheurs devant le Seigneur. Qu'un original comme Christoffel dise que dans vingt ou trente ans la théorie actuelle des fonctions sera enterrée et que toute l'Analyse se ramènera à la théorie des formes, on répond par un haussement d'épaules; mais que Kronecker tienne ce propos que je reproduis *mot pour mot :* « Si j'en ai encore le temps et la force, je montrerai moi-même au monde mathématique que non seulement la Géométrie, mais encore l'Arithmétique peuvent montrer la voie à l'Analyse, et certainement la plus rigoureuse. Si je ne puis plus le faire, ceux qui viendront après moi le feront... et ils reconnaîtront aussi l'inexactitude de *toutes* ces conclusions sur lesquelles repose maintenant ce qu'on appelle *analyse* »; un tel propos, de la part d'un homme doué à un degré aussi élevé pour la production mathématique, et dont j'admire les travaux éminents aussi sincèrement et avec autant de plaisir que tous ses confrères, n'est pas seulement humiliant pour ceux à qui il demande de reconnaître comme une erreur et d'abjurer ce qui a constitué le sujet de leurs

Digitized by Google

Jünger einer neuen Lehre, die freilich erst begründet werden *soll*, sich zu scharen. Wirklich, es ist traurig und erfüllt mich mit bitterm Schmerz, dass das wohlberechtigte Selbstgefühl eines Mannes, dessen Ruhm unbestritten ist, ihn zu Ausserungen zu treiben vermag, bei denen er nicht einmal zu empfinden scheint, wie verletzend sie für andere sind. Aber genug von diesen Dingen, die ich nur berührt habe, um Dir zu erklären, aus welchen Gründen ich an meiner Lehrthätigkeit selbst wenn meine Gesundheit es gestatten sollte, sie noch einige Jahre fortzusetzen, künftighin nicht mehr dieselbe Freude haben kann wie bisher. Du wirst aber darüber nicht reden; ich möchte nicht, dass Andere die mich nicht so genau kennen wie Du, in dem Gesagten, den Ausdruck einer Empfindlichkeit sähen, die mir in der That fremd ist. Niemand weis besser als ich selbst, wie weit ich von dem Ziele entfernt geblieben bin, das ich in der Begeisterung der Jugend mir gesteckt hatte, niemand soll mir aber auch das Bewusstsein rauben, dass mein Streben und Wirken nicht ganz umsonst gewesen ist und der Weg, auf dem ich der Wahrheit nachgegangen bin, nicht als ein Irrweg sich erweisen wird.

Februari 1889 (1). — Dass wir, ich und meine Schwestern vor allen, dann auch die Freunde die Du hier hast, Fuchs, Hettner, Knoblauch, Hensel, P. Dubois und der kürzlich heimgekehrte Hansemann uns herz-

---

pensées et de leurs efforts incessants, mais c'est encore une invitation directe à la jeune génération d'abandonner leurs guides actuels pour se grouper autour de lui comme autour de l'apôtre d'un nouvel enseignement qui *doit* être fondé. Vraiment, il est triste, et cela me remplit d'une amère douleur, de voir un homme dont la gloire est hors d'atteinte, se laisser entrainer par le sentiment bien justifié de sa propre valeur, à des manifestations dont il ne semble même pas comprendre l'effet blessant pour d'autres. Mais c'est assez sur ces choses, dont je ne te parle que pour te faire comprendre pour quels motifs je ne puis plus avoir désormais le même plaisir qu'autrefois à mon enseignement, même si ma santé devait me permettre de le poursuivre encore quelques années. Tu n'en diras rien; je ne voudrais pas que d'autres, qui ne me connaissent pas si bien que toi, puissent voir dans ce que je dis l'expression d'un sentiment, qui, en fait, m'est étranger. Nul ne sait mieux que moi-même à quelle distance je suis resté loin du but que je m'étais fixé dans l'enthousiasme de la jeunesse, mais personne non plus ne pourra m'enlever le sentiment que mes efforts et mon activité n'ont pas été tout à fait stériles et que le chemin sur lequel je me suis engagé à la recherche de la vérité ne se trouvera pas être une voie d'erreur.

(1) *Février* 1889. — Je n'ai pas besoin de t'assurer combien ton succès nous a réjoui le cœur à moi et à mes sœurs, avant tous, ainsi qu'à tes amis d'ici, Fuchs, Hettner, Knoblauch, Hensel, P. Dubois et Hansemann, récemment revenu. J'en

Digitized by Google

lich über Deinen Erfolg (1) gefreut haben, brauche ich nicht zu versichern. Ich ganz besonders empfinde darüber eine wahre Genugthuung; haben doch jetzt competente Richter das Verdikt abgegeben, dass es mit meiner « treuen Schülerin », meiner « Schwäche », doch nicht « eitel Humbug » ist.

Mesdames et Messieurs,

Vous voudrez bien me permettre de terminer ici cette courte revue des lettres de Weierstrass à Sonja. Comme vous l'aurez bien compris, la tâche que je me suis proposée n'a pas été de retracer avec des couleurs propres et d'après ma conception personnelle les relations de Weierstrass et de Sophie Kowalevski. J'ai laissé Weierstrass parler lui-même. Il nous a entretenus non pas seulement de ses relations personnelles avec Sonja, mais aussi du même coup de toute une série de questions de la plus haute portée scientifique. A ce dernier jour de la session du second Congrès international de Mathématiques, lequel a rassemblé un si grand nombre de mathématiciens, j'ai pensé qu'il y aurait peut-être intérêt à écouter la parole d'un homme que nous sommes unanimes, je pense, à reconnaître comme le plus grand, avec Riemann, des mathématiciens du demi-siècle qui vient de s'écouler.

éprouve tout particulièrement une vraie satisfaction; des juges compétents ont donc maintenant prononcé le verdict que ma « fidèle élève », ma « faiblesse », n'est pourtant pas un « vain humbug ».

(1) Sonja avec reçu le prix Bordin de l'Académie des Sciences de Paris la veille de Noël 1888.

Digitized by Google

Digitized by Google

COMMUNICATIONS.

SECTION I. — ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE.

SUR

LES GROUPES D'ORDRE FINI

CONTENUS DANS LE GROUPE LINÉAIRE QUATERNAIRE RÉGULIER;

PAR M. LÉON AUTONNE (LYON).

Désignons par la notation (a_{ij}) ou

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

la substitution linéaire n-aire

$$\mathcal{A}_n = |x_i \quad a_{ij} x_j|,$$

où le déterminant des constantes a_{ij} est $\neq 0$.

Nommons S_n un groupe de $\mathcal{A}_n$, et $\mathfrak{P}_n$ le problème qui consiste construire tous les S_n d'ordre fini.

$\mathfrak{P}_2$ a été depuis longtemps résolu par MM. Klein, Jordan et Gordan. $\mathfrak{P}_3$ a été résolu par M. Jordan (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXIV). Plus tard, dans un Mémoire couronné par l'Académie de Naples, M. Jordan a donné une Méthode générale pour la résolution de $\mathfrak{P}_n$ et montré que tous les S_n d'ordre fini appartenaient à un nombre limité de types. L'application de ces procédés généraux a permis de poursuivre assez loin la construction effective des S_4. Toutefois, M. Jordan s'est arrêté devant une interminable discussion arithmétique où les hypothèses à examiner se présentaient par milliers.

Digitized by Google

Nous croyons que le problème $\mathfrak{P}_4$ général continuera longtemps encore à défier les efforts des géomètres. Par contre, nous espérons un meilleur succès dans un cas particulier, assez étendu du reste, qui fait l'objet de la présente Communication.

Supprimons dorénavant l'indice 4 dans $\mathfrak{P}_4$, S_4, $\mathcal{A}_4$.

Toute $\mathcal{A}$ qui admet pour invariant l'expression

$$x_2 dx_1 - x_1 dx_2 - x_4 dx_3 + x_3 dx_4$$

sera *régulière* par définition. Les régulières forment un groupe *régulier*. Je m'occuperai de construire les S réguliers d'ordre fini.

Les régulières ont été introduites par moi dans le Mémoire *sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré,* présenté en 1890 à l'Académie des Sciences de Paris, et inséré au LXIe Cahier du *J. E. P.* Plusieurs résultats relatifs aux régulières, dus à Lie ou à Knothe, se trouvent aussi dans le troisième Volume (p. 258 et suivantes) de la *Theorie der Transformationsgruppen,* 1893, de Lie-Engel.

L'interprétation géométrique des régulières est simple quand on prend les x pour les coordonnées homogènes d'un point de l'espace.

Nommons *capital* un certain complexe linéaire et *capitale* toute droite complexe. *Le groupe régulier permute transitivement les* ∞^3 *capitales.* Appelons *normal* un tétraèdre où deux arêtes sont conjuguées par rapport au complexe capital et les quatre autres sont capitales. *Le groupe capital permute transitivement les divers tétraèdres normaux.* Le tétraèdre de référence est normal. Si la régulière $\mathcal{A}$ transforme la figure g en la figure g', je dirai que g *vient* RÉGULIÈREMENT *sur* g'. Si A et B sont des symboles de substitutions ou de groupes, la relation

$$\mathcal{A}^{-1} A \mathcal{A} = B$$

veut dire que A *se met* RÉGULIÈREMENT *sous la forme* B. Tout tétraèdre normal peut venir régulièrement sur celui de référence et les considérations géométriques permettent de placer, sans sortir jamais de la régularité, les groupes S sous une des formes simples telles que celles ci-après.

La présente matière se rattache à une autre qui, au premier abord, en paraît bien éloignée : c'est la théorie des substitutions σ, planes, birationnelles et de contact

$$\sigma = \begin{vmatrix} y_l & \varphi_l\begin{pmatrix} p & p' \\ y; & v \end{pmatrix} \\ v_l & \psi_l\begin{pmatrix} q & q' \\ y; & v \end{pmatrix} \end{vmatrix} \qquad (l = 1, 2, 3),$$

Digitized by Google

où les y et les v sont les coordonnées ponctuelles ou linéaires homogènes dans un plan, les φ et les ψ sont des formes biternaires ayant les dimensions marquées par les entiers positifs p, p', q, q'.

La construction des groupes Γ, formés de substitutions σ où aucun des quatre entiers p, q, p', q' ne dépasse 2, coïncide avec celle des groupes quaternaires réguliers.

Voici maintenant la théorie algébrique des régulières $\mathfrak{A} = (a_{ij})$:

I.

Si l'on pose

$$(ij) = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}, \qquad (ij)' = \begin{vmatrix} a_{3i} & a_{3j} \\ a_{4i} & a_{4j} \end{vmatrix},$$

les conditions de régularité sont

$$\begin{matrix} (12)' = (34), & (23)' = (23), & (41)' = (41) \\ (34)' = (12), & (31)' = (31), & (42)' = (42) \end{matrix} \qquad (12) - (34) = 1.$$

II.

Si $\mathfrak{A}' = (a_{ji})$ est la *transposée* de la régulière $\mathfrak{A} = (a_{ij})$, *on a*

$$\mathfrak{A}'^{-1} = \varepsilon^{-1} \mathfrak{A} \varepsilon,$$

où ε *est la régulière*

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \end{vmatrix}.$$

III.

Toute régulière d'ordre fini peut être régulierement mise sous forme canonique

$$|x_i \quad r_i x_i|, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

avec

$$r_1 r_2 = r_3 r_4 = 1.$$

Les r sont, bien entendu, des racines de l'unité.

J'ai construit aussi les groupes réguliers d'ordre fini *décomposables*. Voici dans quel cas M. Jordan dit qu'un groupe n — aire est décomposable : les n variables, convenablement choisies, peuvent être réparties en systèmes T, T', ..., tels que toute substitution du groupe remplace les variables du système T, par exemple, par des fonctions linéaires homo-

Digitized by Google

gènes des variables d'un autre système, tel que T'. Alors T et T' contiennent évidemment le même nombre de variables.

Voici l'énumération des groupes réguliers décomposables d'ordre fini. On a omis, pour abréger, quelques groupes holoédriquement isomorphes à des groupes de permutations entre quatre lettres. Il va sans dire que tous les groupes ci-dessous ont été régulièrement mis sous leur forme la plus simple.

Type I.

Régulières de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = 1.$$

les groupes P et Q dérivés des binaires

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

étant d'ordre fini.

Type II.

S s'obtient en combinant avec un sous-groupe $\mathfrak{A}$ du type I la régulière

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} = -1.$$

$\mathfrak{B}^2$ fait partie de $\mathfrak{A}$, lequel est permutable à $\mathfrak{B}$ et contient la moitié des substitutions de S. Nommons λ et μ les binaires

$$\lambda = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}, \qquad \mu = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix},$$

et P et Q les groupes qui figurent dans $\mathfrak{A}$. On a

$$P = \mu^{-1} Q \mu, \qquad Q = \lambda^{-1} P \lambda.$$

Digitized by Google

TYPE III.

Régulières de la forme

$$\begin{pmatrix} A & o & B & o \\ o & rD & o & rC \\ C & o & D & o \\ o & rB & o & rA \end{pmatrix}, \qquad r^{-1} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

où le groupe binaire

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est d'ordre fini.

TYPE IV.

S s'obtient en combinant avec un sous-groupe $\mathfrak{L}$ du type III la régulière unique

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix} o & \alpha & o & \beta \\ \rho\delta & o & \rho\gamma & o \\ o & \gamma & o & \delta \\ \rho\beta & o & \rho\alpha & o \end{pmatrix}, \qquad \rho^{-1} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

$\mathfrak{W}^2$ figure dans $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{L}$ est permutable à $\mathfrak{W}$ et contient la moitié des substitutions de S.

Il est remarquable que, dans la structure des groupes réguliers décomposables d'ordre fini entrent des groupes binaires, *mais jamais ternaires*. Cette circonstance est particulièrement heureuse dans la construction, que j'ai abordée, des groupes réguliers indécomposables. En effet, d'une part, d'après la méthode générale de M. Jordan, la recherche des groupes indécomposables repose sur celle des décomposables et, d'autre part, les groupes ternaires sont plus compliqués que les binaires, tout en présentant, jusqu'à ce jour, certaines incertitudes dans leur énumération complète [1].

---

[1] Postérieurement au Congrès, j'ai précisé toute cette théorie dans une Note insérée aux *Comptes rendus* du 11 mars 1901, et dans un Mémoire qui paraîtra dans le *Journal de Mathématiques*.

Digitized by Google

Digitized by Google

REMARKS ON KRONECKER'S MODULAR SYSTEMS;

By Harris HANCOCK.

Je voudrais dire quelques mots sur le Mémoire intitulé : *Some remarks on Kronecker's modular systems,* que j'ai l'honneur de présenter au Congrès des Mathématiciens.

On dit qu'une fonction entière rationnelle $\varphi(x)$ aux coefficients entiers

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

est *réductible en facteurs par rapport à un nombre entier premier* p, s'il est possible de trouver des fonctions entières rationnelles $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ et $\chi(x)$ à coefficients rationnels entiers, telles que

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x) + p\chi(x)$$

ou

$$\varphi(x) \equiv \varphi_1(x)\varphi_2(x) \qquad \text{par rapport au module } p.$$

Si l'on ne peut pas trouver de telles fonctions, on dit que φ est *irréductible* par rapport au module p.

On peut toujours trouver un entier α tel que

$$a_0\alpha \equiv 1 \qquad (\text{mod } p)$$

et, par conséquent, on peut écrire

$$\alpha\varphi(x) = \Phi(x) + p\psi(x),$$

$\chi(x)$ étant une fonction rationnelle entière à coefficients entiers et $\Phi(x)$ ayant la forme

$$\Phi(x) = 1.x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des entiers plus petits que p.

On sait que dans le domaine des nombres rationnels tous les nombres entiers peuvent être distribués par rapport au module p en p classes et que chaque entier appartenant à l'une des classes est congruent (mod p) à l'un des entiers $0, 1, 2, \ldots, p-1$, et à un seul.

Si maintenant on multiplie la fonction $\varphi(x)$ par tous les entiers possibles, on voit que les fonctions résultantes peuvent être distribuées en p classes par rapport au module p, et que l'on peut prendre comme fonction représentative de chaque classe les fonctions que l'on obtient en multipliant la fonction $\Phi(x)$ respectivement par

Digitized by Google

les entiers 0, 1, 2, ..., $p-1$ et en réduisant les coefficients des fonctions ainsi obtenues par rapport au mod p.

On définit le système modulaire

$$[p, \varphi(x)]$$

comme le *complexe* de toutes les fonctions linéaires de p et $\varphi(x)$

$$p\alpha(x) + \varphi(x)\beta(x),$$

dans lesquelles $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont des fonctions entières de x quelconques à coefficients entiers.

On voit immédiatement que les deux systèmes

$$[p, \varphi(x)] \quad \text{et} \quad [p, \Phi(x)]$$

représentent le même complexe de fonctions et, par conséquent, on dit que les deux systèmes sont équivalents et l'on écrit

$$[p, \varphi(x)] \backsim [p, \Phi(x)].$$

Dans la fonction

$$\Phi(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n,$$

les entiers $A_1, A_2, \ldots, A_n$ peuvent avoir l'une quelconque des valeurs 0, 1, 2, ..., $p-1$ et, par conséquent, il y a p^n fonctions de la forme $\Phi(x)$.

Les $p^n - 1$ fonctions autres que $\Phi(x)$ peuvent être appelées le *système complet* des résidus incongruents par rapport au système modulaire $[p, \Phi(x)]$.

Les caractéristiques de ces fonctions sont : 1° la différence de deux quelconques d'entre elles n'est pas $\equiv 0 [\text{mod } p, \Phi(x)]$, et 2° toute fonction entière en x à coefficients rationnels entiers est congruent à l'une de ces fonctions par rapport au système modulaire $[p, \Phi(x)]$, et à une seule.

Si l'on désigne les $\nu = p^n - 1$ fonctions par $R_1, R_2, \ldots, R_\nu$, on a

$$(1) \qquad \prod_{k=1}^{k=\nu} (x - R_i R_k) \equiv \prod_{k=1}^{k=\nu} (x - R_k) \qquad [\text{mod. } p, \Phi(x)]$$

$$(i \text{ étant} = 1, 2, \ldots, \nu)$$

et

$$(2) \qquad R_i^\nu \equiv 1 \qquad [\text{mod } p, \Phi(x)],$$

qui est *une forme générale du théorème de Fermat.*

Si $\Phi(x)$ est une fonction irréductible par rapport au module p, le système $[p, \Phi(x)]$ est un *système modulaire premier.*

Dans ce cas, si r désigne une quelconque des ν fonctions, et si

$$\mathcal{G}(r) = \psi_0(x) r^m + \psi_1(x) r^{m-1} + \ldots + \psi_m(x) \equiv 0 \qquad [\text{mod } p, \Phi(x)],$$

où $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)$ sont des fonctions entières en x à coefficients rationnels entiers, la congruence ne peut avoir plus que m racines incongruentes $[\text{mod } p, \Phi(x)]$.

Digitized by Google

Puisque

$$R^{\nu} - 1 \equiv 0 \qquad [\text{mod } p, \Phi(x)]$$

a ν racines, savoir les ν quantités $R_1, R_2, \ldots, R_\nu$, on voit que cette congruence peut être mise sous la forme

$$R^{p^\nu} - 1 \equiv \prod [R - (A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n)] \qquad [\text{mod } p, \Phi(x)],$$

le produit étant étendu à toutes les fonctions que l'on obtient en remplaçant les A par les différentes valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

Il résulte immédiatement que

$$-1 \equiv \prod (A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n) \qquad [\text{mod } p, \Phi(x)],$$

ce qui est *une forme générale du théorème de Wilson.*

De ce que nous avons dit il résulte que les fonctions entières en x, à coefficients rationnels entiers, jouent, par rapport au système modulaire $[p, \Phi(x)]$, le même rôle que les nombres rationnels entiers par rapport aux nombres premiers comme modules dans la théorie élémentaire des nombres.

Les résultats que nous avons trouvés ne diffèrent que par leur forme de ceux donnés par Serret (*Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, Chap. III), et l'on trouvera que les résultats généraux, développés dans le Mémoire que je présente au Congrès, peuvent être regardés soit comme extensions des théorèmes de Serret, soit comme généralisations de la notion de Gauss sur un seul module, et c'est naturellement ce dernier point de vue qu'a suivi Kronecker.

De ce cas simple de l'équivalence

$$[p, \varphi(x)] \backsim [p, \Phi(x)],$$

on voit que la question qu'il faut considérer d'abord est la réduction du système modulaire de la forme

$$[m_1, m_2, \ldots, m_\mu, f_1(x), \ldots, f_\nu(x)],$$

dans lequel les éléments $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ sont des entiers rationnels et les fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$ des fonctions entières en x à coefficients entiers, dans leur forme la plus simple.

Cela a été le sujet d'un Mémoire qui a paru dans le *Journal de Crelle*, vol. 119.

Dans un autre Mémoire qui va paraître prochainement dans le même journal, j'ai considéré la réduction des systèmes modulaires où les éléments sont des fonctions entières de plusieurs variables à coefficients entiers rationnels, et la décomposition en systèmes modulaires premiers a été effectuée.

Ces fonctions à plusieurs variables et ces systèmes modulaires premiers occupent dans le domaine général de la discussion la même place que les nombres entiers rationnels et les nombres premiers dans le champ usuel de l'investigation, et l'on trouvera que les théorèmes, dans la théorie usuelle des nombres, sont des cas particuliers de cette théorie plus générale.

Le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter au Congrès considère le cas plus gé-

Digitized by Google

néral encore où les coefficients, au lieu d'être des nombres entiers rationnels, sont des nombres entiers algébriques.

Les résultats sont obtenus par l'extension des idées de Dedekind et Kronecker et l'on a obtenu de nouveaux résultats que, j'espère, on trouvera intéressants.

The study of the cyclotomic equation was for a long time an interesting subjet for mathematicians. Proofs of its irreducibility are given among others by Gauss, Kronecker, Eisenstein and Schönemann (see *Notice by Schönemann* in *Crelle's Journal,* bd. 40; p. 188). Later Kronecker [*Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen,* § 4 (*Crelle's Journal,* bd. 92)], derived a general criterion for the irreducibility of an integral function of any number of variables with rational integral coefficients.

The notion of the irreducibility of an integral function of one variable with rational integral coefficients with respect to a prime integer as a modulus is found in Schönemann's paper (*Crelle's Journal,* bd. 31, p. 269); while the more general idea of the decomposition into factors of such a function with respect to two moduli p, $\varphi(x)$, of which p is a prime rational integer and $\varphi(x)$ an irreducible (mod p) integral function with integral coefficients, is given by Serret (*Cours d'Algèbre supérieure,* t. II, Chap. III).

The extension of this notion to an integral function of any number of variables with rational integral coefficients with respect to a finite number of moduli that are integral in the variables in question with rational integral coefficients, is a natural consequence.

Until the beginning of this century investigations relative to the theory of numbers were confined to rational numbers.

The early researches of Abel, Gauss, Cauchy, Jacobi and Eisenstein in the theory of algebraic numbers were continued especially by Kummer, Dedekind and Kronecker; Kummer by the introduction of the ideal prime numbers overcame for the simple case of the algebraic numbers that are derived from the roots of unity many of the difficulties that the older mathematicians had encountered; while Dedekind, extending the ideas of Kummer, founded for the general algebraic numbers an independent theory as was done by Gauss for the usual rational numbers.

With the introduction of the algebraic numbers into the investigation Galois, Jordan and other mathematicians wished these quantities to hold a similar position as the usual rational numbers hitherto had done and therefore they widened, so to speak, the domain of rationality by allowing to appear in such domain the rational functions of these algebraic numbers.

Digitized by Google

Kronecker always with the idea of arithmetizing the problems which he considered, made the integral functions of any number of variables with algebraic integral coefficients take the place of the ordinary rational integers in the usual theory of numbers and in his realm of rationality these functions occupy the same place as the rational numbers in the hitherto restricted realm.

The more extended notion of the decomposition into factors is with Kronecker the reduction of an integral function χ of several variables with algebraic integral coefficients into its irreducible factors, where such a reduction is taken with respect to a finite number of moduli which are likewise integral functions of the variables in question with algebraic integral coefficients.

We have to consider therefore, on the one hand, the nature and characteristic properties of the function χ with respect to a system of moduli and, on the other hand, the nature and properties of the modular system itself.

The reduction of such a modular system to its simplest form and the derivation of the prime modular systems is a problem of the first importance. For it will be found that the functions, in the realms of investigation considered, have with respect to the prime modular systems many of the analogous properties that the usual rational numbers have with regard to prime rational integers, and the prime modular systems have with respect to the modular systems the same relations as the prime integers to the ordinary rational integers.

Jacobi (*Gesammelte Werke,* bd. I, p. 379) wished to give to the transcendents

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

where X is a function in x of degree greater than the fourth, the name *Abelian transcendents,* since they were first introduced into analysis by Abel, who showed their great importance by a comprehensive theorem. This theorem Jacobi calls *Abel's theorem* since it carries « *das ganze Gepräge seiner Gedankentiefe* ».

We do not consider it less appropriate to call these modular systems *Kronecker's modular systems* (1), as they characterize so much of the work done by that great mathematician : on the one hand, in the extended realm of rationality such systems appear in the same relations to the

(1) Cf. *Quart. Journ. of Mathematics,* vol. XXVII, p. 147.

Digitized by Google

integral algebraic functions with integral algebraic coefficients as the ordinary rational integers do as moduli in the usual Gaussian theory of numbers and thus the whole theory of numbers is extended in great generality; on the other hand, they stand in direct connection with two other great mathematical theories that were particularly interesting to Kronecker, the theory of algebraic functions and their integrals (the abelian integrals) and the theory of algebraic equations (the principles of Galois).

The extended notion of division.

We say that an algebraic integer μ belonging to the algebraic realm Ω is decomposable into factors, if there exist in Ω two algebraic integers μ_1 and μ_2 different from the algebraic unities in Ω, such that

$$\mu = \mu_1 \mu_2; \qquad \text{hence} \qquad norm(\mu) \qquad \text{or} \qquad N(\mu) = N(\mu_1) N(\mu_2),$$

or, denoting these norms respectively by the rational integers m, m_1, m_2, we see that $m = m_1 m_2$, so that the divisibility of μ into the two factors μ_1 and μ_2 corresponds to the decomposition of the rational integer m into the two factors m_1 and m_2. Also corresponding to the case where the norms are prime integers, there clearly exist algebraic integers that are not decomposable into factors.

But here we meet with the difficulty : *the decomposition of an algebraic number into its irreducible factors is not unique.*

Take for example the realm $\Omega = P(\theta)$, where θ, a root of the equation

$$\theta^2 + 5 = 0,$$

is adjoined to the realm of rational numbers.

In this realm, $6 = 2.3 = (1 + \theta)(1 - \theta)$, and in both cases the factors are irreducible [*cf.* Dedekind (1), p. 451].

To overcome this difficulty we make use of the following *extended notion of division* which was initiated by Kummer : In the realm of rational numbers P we have the conception of what is known as the *greatest common divisor* of several numbers a, b, c, ... This divisor d we express in the form

$$d = ax + by + cz + \ldots,$$

where $x, y, z, \ldots$ are determinate integers.

(1) I shall use the word *Dedekind* as a simple method of refering to *Dirichlet's Zahlentheorie* by Dedekind, 4th edition.

Digitized by Google

We may say also that a rational number m *is divisible by the complex* $a, b, c, \ldots$, when we can determine integers $x', y', z', \ldots$, such that

$$m = ax' + by' + cz' + \ldots.$$

But clearly so long as we remain in the realm P, this conception of divisibility is *superfluous,* since any number that is divisible by the complex $a, b, c, \ldots$, is divisible by the greatest common divisor d of these numbers, and every number that is divisible by d is divisible also by the complex $a, b, c, \ldots$.

Hence, so long as we remain in the realm of rational numbers, the conception of the divisibility by the complex $a, b, c, \ldots$ is identical with that of the divisibility by d.

The number m is divisible by d if there exists an integer x such that $m = dx$.

We have also the theorem, that, if the product of several integers is divisible by a prime integer p, then at least one of the factors is divisible by p; from this it follows that every integer is decomposable into a product of a finite number of prime integers in one and only one way.

If the realm Ω is an arbitrary *algebraic realm,* then also an algebraic number μ of this realm is said to be divisible by an algebraic integer δ of this realm, if we can determine within Ω an algebraic integer ξ, such that $\mu = \delta\xi$.

Also the algebraic number μ is said to be divisible by the complex of algebraic numbers $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ in Ω if it is possible to determine in this realm algebraic integers $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, so that

$$\mu = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \ldots.$$

But this conception is no longer *superfluous;* for suppose that δ is another algebraic number by which the algebraic numbers $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ are divisible, then every number that is divisible by the complex $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ is also divisible by δ. The inverse, however, is not true : every number that is divisible by δ is not divisible by the complex $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, since, in that case, δ must have the form

$$\delta = \alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta' + \ldots,$$

where $\xi', \eta', \zeta', \ldots$ are algebraic integers in Ω, and, on this assumption, δ is therefore divisible by every divisor common to the numbers $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ and must consequently be the greatest common divisor of these numbers in the sense customarily given in the theory of rational numbers.

Digitized by Google

But in this sense a greatest common divisor of the algebraic numbers $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ only exists so long as we remain in the infinite realm of all algebraic numbers. If then we leave the realm Ω out of consideration, there exists something which is the analogon of the greatest common divisor of rational numbers. On the other hand, unless we take a fixed finite realm of rationality, to which all our quantities must belong, there exist no such thing as prime integers and the notion of the unique decomposition of an integer into its prime factors is lost; for so long as we remain within the infinite realm of all algebraic numbers, if α is an algebraic integer, then $\alpha = \sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}$, and $\sqrt{\alpha}$ is also an algebraic integer. Consequently every algebraic integer is decomposable into factors *ad infinitum*.

Hence the notion of divisibility by the complex of the algebraic numbers $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, is no longer *superfluous*, when we limit ourselves to a finite fixed realm Ω; and we may therefore say that *an algebraic number* μ *is divisible by the complex* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, *if it is possible to determine algebraic integers* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, *such that*

$$\mu = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \ldots,$$

where all quantities introduced belong to the real Ω, *the coefficients* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *of the linear form being fractional or integral, while the variables* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *are integers.*

The collectivity of the algebraic numbers that take the above form when the quantities $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ are varied and given *rational* integral values is called by Dedekind (p. 494), a *modul* and denoted by $[\alpha, \beta, \gamma, \ldots] = \mathfrak{a}$, say.

The quantities $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ are called the *elements* of the modul. We say then that a number μ is divisible by the modul $[\alpha, \beta, \gamma, \ldots]$, when we may so determine rational integers $x, y, z, \ldots$ that

$$\mu = \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots;$$

and the modul $\mathfrak{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$ is divisible by the modul $\mathfrak{a}$ when each element of $\mathfrak{b}$ is divisible by the modul $\mathfrak{a}$ or, what is the same thing, when every number that is divisible by $\mathfrak{b}$ is also divisible by $\mathfrak{a}$.

If all numbers that are divisible by the modul $\mathfrak{a}$ are expressible in the form

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

where $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are rational integers and the coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ are numbers that are divisible by the modul $\mathfrak{a}$, then the modul $\mathfrak{a}$ is called *a finite modul* of the *rank* n and the quantities $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ are

Digitized by Google

called a *basis* of this modul. As we have to do only with finite moduls, we may determine for every modul a definite basis.

All the algebraic integers that belong to the algebraic realm Ω of the nth degree form a finite modul of the nth rank, which Dedekind (p. 537) denotes by v.

Let $w_1, w_2, \ldots, w_n$ be a basis of the modul v. Then if $\xi, \eta, \ldots$ are algebraic integers in Ω they are expressible in the form

$$\begin{aligned} \xi &= w_1 x_1^{(1)} + w_2 x_2^{(1)} + \ldots + w_n x_n^{(1)}, \\ \eta &= w_1 x_1^{(2)} + w_2 x_2^{(2)} + \ldots + w_n x_n^{(2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

where $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)} \ldots$ are rational integers.

If then

$$\mu = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \ldots,$$

we have

$$\mu = \alpha w_1 x_1^{(1)} + \alpha w_2 x_2^{(1)} + \ldots + \alpha w_n x_n^{(1)} + \beta w_1 x_1^{(2)} + \beta w_2 x_2^{(2)} + \ldots + \beta w_n x_n^{(2)} + \ldots.$$

Since $\alpha w_1, \alpha w_2, \ldots, \beta w_1, \ldots$ are numbers belonging to the realm Ω, it is seen that μ is expressible as a linear form of a finite number of rational integers with coefficients that belong to Ω.

As this number is finite, and as the rank of a finite modul in Ω cannot be greater than n, the degree of Ω, and as $w_1, w_2, \ldots, w_n$ are independent, so that the rank is not less than n, it follows that *all algebraic numbers in Ω of the form*

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \ldots,$$

where $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ are integral or fractional and the numbers $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, are integral, constitute a modul of the nth rank in the realm Ω of the nth degree.

This system of numbers is called an *ideal* and denoted by $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$.

If then $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ are quantities of Ω, then the *ideal* $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ consist of all numbers which may by expressed in the form

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \ldots, \tag{1}$$

where $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, are *integral algebraic* numbers in Ω, while the *modul* $[\alpha, \beta, \gamma, \ldots]$ consists of all those numbers which have the form (1) for *integral rational* numbers $\xi, \eta, \zeta, \ldots$.

With Dedekind (p. 495) we use the symbol $>$ as that of division, so that $w > b$ means that *w is divisible by b.*

Digitized by Google

A modulus $\mathfrak{c}$ which has the two properties :

1° $$\mathfrak{c}\mathfrak{c} > \mathfrak{c},$$

2° $$1 > \mathfrak{c},$$

is called by Kronecker (*Grundzüge,* § 5) an *art* or *species* and by Dedekind (p. 305) an *order* (*Ordnung*).

Since every realm except the *trivial* case that consists of only zeros contains unity, it follows that

$$1 > \mathfrak{v},$$

and since also $\mathfrak{v}\mathfrak{v}$, or $\mathfrak{v}^2 > \mathfrak{v}$, it is seen that $\mathfrak{v}$ is a species.

Further since $\mathfrak{v}^0 = \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}$, the ideal $\mathfrak{v}$ is its own species and is called the *principal* species of the realm Ω. This species takes the same place in the realm Ω as *unity* does in the realm of rational numbers.

Modular systems.

Let A; $M_1, M_2, \ldots, M_\mu$; $M'_1, M'_2, \ldots, M'_\nu$ be integral functions of any number of variables with algebraic integral coefficients that belong to the realm Ω, the integers μ and ν being finite.

As above, we say that A is divisible by the modular system $M_1, M_2, \ldots, M_\mu]$, when

$$A \equiv 0 \qquad [\text{mod } M_1, M_2, \ldots, M_\mu],$$

that is, when

$$A = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots + M_\mu X_\mu,$$

where $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$ are also integral functions of the variables in question with algebraic integral coefficients that belong to the realm Ω.

If we have the μ congruences

$$M_h \equiv 0 \,[\text{mod } M'_1, M'_2, \ldots, M'_\nu] \qquad (h = 1, 2, \ldots, \mu),$$

the modular system $[M_1, M_2, \ldots, M_\mu]$ is said to *contain* the modular system $[M'_1, M'_2, \ldots, M'_\nu]$.

From this it is seen that a modular system contains another modular system when each element of the first system is divisible by the second system; that is, if

$$[M_1, M_2, \ldots, M_\mu] \equiv 0 \,[\text{mod } M'_1, M'_2, \ldots, M'_\nu],$$

or, using Dedekind's symbol of division, if

$$[M_1, M_2, \ldots, M_\mu] > [M'_1, M'_2, \ldots, M'_\nu].$$

Digitized by Google

If also

$$[M'_1, M'_2, \ldots, M'_\nu] > [M_1, M_2, \ldots, M_\mu],$$

we have the equivalence

$$[M_1, M_2, \ldots, M_\mu] \backsim [M'_1, M'_2, \ldots, M'_\nu].$$

From what we have written above it appears that a modular system *contains* another modular system when it *is divisible* by that system. Hence, the two conceptions of *being divisible by* and of *being contained in,* which are usually the opposites of each other, are here identical.

It is evident that any system $[M_1, M_2, \ldots, M_\mu]$ may be transformed into an equivalent system by adding to or subtracting from any element of the system a linear function of the other elements, where the coefficients of the linear function are integral functions of the variables with algebraic integral coefficients that belong to the realm Ω; and any element may be adjoined to a modular system or dropped from it when this element is divisible by the remaining elements (in the sense of divisibility employed above).

The reduction of modular systems.

In the realm of rational numbers the system

$$[6, 15, 18] \backsim [6, 15-2.6, 3.6] \backsim [6, 3] \backsim [3].$$

In general, the greatest common divisor d of the integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ may be expressed in the form

$$d = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$

where $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are determinate integers. Hence we may adjoin the element d to the modular system $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, which then becomes $(d, a_1, a_2, \ldots, a_n)$; and since $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are all multiples of d, these elements may be dropped from the system, leaving

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] \backsim [d].$$

Consider next the modular system

$$[\alpha_1, \alpha_2]$$

where α_1, α_2 are algebraic integers of the realm Ω, that is, quantities belonging to the realm of integrity $[\nu]$, since all integers of Ω are divisible by ν.

Digitized by Google

As any element may be added to a modular system when this element is divisible by the elements of that system, it is seen that

$$[\alpha_1, \alpha_2] \backsim [\alpha_1, \alpha_2, \xi_1\alpha_1, \xi_2\alpha_2],$$

where ξ_1 and ξ_2 are algebraic integers in Ω.

In a similar manner

$$[\alpha_1, \alpha_2] \backsim [1.\alpha_1, 1.\alpha_2, \nu\alpha_1, \nu\alpha_2],$$

ν being the *principal species* which contains all the algebraic integers of Ω. Further since $1 > \nu$, it follows that

$$[\alpha_1, \alpha_2] \backsim [\nu\alpha_1, \nu\alpha_2].$$

An ideal $\nu\alpha$ may be uniquely decomposed into its prime factors, so that

$$\nu\alpha = \mathfrak{p}_1^{l_1}.\mathfrak{p}_2^{l_2}\ldots,$$

where $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ are prime ideals and $l_1, l_2, \ldots$ rational integers.

If two ideals $\nu\beta_1$ and $\nu\beta_2$ are relatively prime, then their greatest common divisor is ν and may be written (Dedekind, p. 556),

$$\nu\beta_1 + \nu\beta_2 = \nu.$$

From this it is seen at once that the system $[\nu\alpha_1, \nu\alpha_2]$ is equivalent to the system $(\mathfrak{p}^k.\mathfrak{q}^l, \ldots)$, where the product of ideals $\mathfrak{p}^k, \mathfrak{q}^l, \ldots$ is common to both ideals $\nu\alpha_1, \nu\alpha_2$.

For if

$$\nu\alpha_1 = \mathfrak{p}^k.\mathfrak{q}^l\ldots\mathfrak{a}_1,$$

and

$$\nu\alpha_2 = \mathfrak{p}^k.\mathfrak{q}^l\ldots\mathfrak{a}_2,$$

where $\mathfrak{a}_1$ and $\mathfrak{a}_2$ are ideals that are relatively prime to each other, then

$$[\nu\alpha_1, \nu\alpha_2] \backsim [\mathfrak{p}^k.\mathfrak{q}^l\ldots\mathfrak{a}_1;\ \mathfrak{p}^k.\mathfrak{q}^l\ldots\mathfrak{a}_2;\ \mathfrak{p}^k.\mathfrak{q}^l\ldots\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{p}^k.\mathfrak{q}^l\ldots\mathfrak{a}_2]$$
$$\backsim [\mathfrak{p}^k.\mathfrak{q}^l\ldots\mathfrak{a}_1;\ \mathfrak{p}^k.\mathfrak{q}^l\ldots\mathfrak{a}_2;\ \mathfrak{p}^k.\mathfrak{q}^l\ldots\nu] \backsim [\mathfrak{p}^k.\mathfrak{q}^l\ldots\nu] \backsim [\mathfrak{p}^k.\mathfrak{q}^l\ldots].$$

It follows at once that the modular system

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n],$$

where the elements $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ are integral quantities of the realm $[\nu]$, is equivalent to the system

$$[\mathfrak{p}_1^{h_1}.\mathfrak{p}_2^{h_2}\ldots],$$

where $h_1, h_2, \ldots$ are rational integers, and the prime ideals $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ occur to these powers in each of the elements

$$\nu\alpha_1, \nu\alpha_2, \ldots, \nu\alpha_n.$$

Digitized by Google

In particular, if there is no ideal common to all the elements $\nu\alpha_1$, $\nu\alpha_2, \ldots, \nu\alpha_n$, then the system

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \backsim [\nu].$$

The analogon in the realm of rational numbers is the system

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] \backsim [1],$$

if there is no divisor save unity common to all the integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Reduction of the modular systems which have as elements integral functions of one variable with algebraic integral coefficients that belong to the realm Ω.

The integral quantities that appear as elements in these systems are fo the form

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n,$$

where $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ are algebraic integers of the realm Ω.

We may therefore say that such quantities belong to the realm of integrity $[\nu, x]$.

Consider *first* in the realm of integrity $[1, x]$ the modular system

$$[ax^2 + cx + e, bx + d],$$

where a, c, e, b, d are rational integers.

We may assume that the two elements $ax^2 + cx + e$ and $bx + d$ have no factor in common, since such a factor could at once be taken out as a factor of the modular system.

Owing to the identical relation

$$(ax^2 + cx + e)b^2 = (abx + bc - ad)(bx + d) + b^2e - bcd + ad^2,$$

it is seen that the positive or negative integer

$$m = b^2e - bcd + ad^2 \equiv 0 \qquad [\text{mod } ax^2 + cx + e, bx + d]$$

may be added as an element to the system $[ax^2 + cx + e, bx + d]$ without altering the equivalence.

Consider next the same system in the realm $[\nu, x]$, where now a, c, e, b, d are algebraic integers in Ω. Then as above, if we assume that the elements $ax^2 + cx + e$ and $bx + d$ have no common factor in this realm, the algebraic integer

$$\mu = b^2e - bcd + ad^2$$

is different from zero.

Digitized by Google

Since on the other hand

$$\mu \equiv 0 \qquad [\text{mod } ax^2 + cx + e,\ bx + d],$$

it is seen that μ may be added as an element to the given modular system, which becomes

$$[\mu,\ ax^2 + cx + e,\ bx + d].$$

Further since it does not change the equivalence of this system, if we multiply each element by ν, we may consider the coefficients of the elements either as the integral numbers a, c, e, b, d or as the integral ideals νa, νc, νe, νb, νd, since (see Dedekind, p. 542) the divisibility of the algebraic integer λ by the algebraic integer μ is identical in meaning with the divisibility of the ideal $\nu\lambda$ by the ideal $\nu\mu$.

Suppose that the ideal $\mathfrak{q}$ is a common factor of the ideal νa, νc, νe, so that $\nu a x^2 + \nu c x + \nu e = \mathfrak{q}(\nu a' x^2 + \nu c' x + \nu e')$; then it may be shown that if $\mathfrak{q}$ is not a divisor of the ideal $\nu\mu$ (a divisor which is a factor of $\nu\mu$ in the sense employed in the domain of rational numbers), the element $\mathfrak{q}(\nu a' x^2 + \nu c' x + \nu e')$ may be replaced in the modular system by the element $\delta(\nu a' x^2 + \nu c' x + \nu e')$, where δ is a determinate ideal which is a divisor of $\nu\mu$, and that by this change of the elements, the equivalence of the modular system has not been altered.

In order to prove this let δ be an ideal which is the greatest common divisor of the ideals $\mathfrak{q}$ and $\nu\mu$ so that therefore (*see* Dedekind, p. 554),

$$\delta = \mathfrak{q} + \nu\mu.$$

The system

$$[\nu\mu,\ \mathfrak{q}(\nu a' x^2 + \nu c' x + \nu e'),\ bx + d]$$

is, owing to the presence of the element $\nu\mu$, equivalent to

$$\begin{aligned}
&[\nu\mu,\ \mathfrak{q}(\nu a' x^2 + \nu c' x + \nu e'), && \nu\mu(\nu a' x^2 + \nu c' x + \nu e'),\ bx + d] \\
\backsim\ &[\nu\mu,\ \mathfrak{q}(\nu a' x^2 + \nu c' x + \nu e'), && (\mathfrak{q} + \nu\mu)(\nu a' x^2 + \nu c' x + \nu e'),\ bx + d] \\
\backsim\ &[\nu\mu,\ \mathfrak{q}(\nu a' x^2 + \nu c' x + \nu e'), && \delta(\nu a' x^2 + \nu c' x + \nu e'),\ bx + d],
\end{aligned}$$

which system, since $\mathfrak{q}$ is a multiple of δ, is equivalent to

$$[\nu\mu,\ \delta(a' x^2 + c' x + e'),\ bx + d].$$

In the modular system

$$[\nu\mu,\ ax^2 + cx + e,\ bx + d],$$

suppose that $\nu\mu = \mathfrak{p}_1 . \mathfrak{p}_2$ where $\mathfrak{p}_1$ and $\mathfrak{p}_2$ are ideals that are relatively

Digitized by Google

prime to each other; and for brevity write

$$f_1(x) = ax^2 + cx + e,$$
$$f_2(x) = bx + d.$$

We say then that the system

$$[\nu\mu, f_1(x), f_2(x)]$$

is equivalent to the product of the two systems

$$[\mathfrak{p}_1, f_1(x), f_2(x)] \quad \text{and} \quad [\mathfrak{p}_2, f_1(x), f_2(x)].$$

For the product of these systems is

$$[\mathfrak{p}_1 . \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1 f_1(x), \mathfrak{p}_2 f_1(x), \mathfrak{p}_1 f_2(x), \mathfrak{p}_2 f_2(x), f_1(x)^2, f_2(x)^2, f_1(x) f_2(x)].$$

Owing to the presence of the two elements $\mathfrak{p}_1 f_1(x)$ and $\mathfrak{p}_2 f_1(x)$ we may add $(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2) f_1(x)$ or $\nu f_1(x)$ to the system; but as $\nu f_1(x) = f_1(x)$, we may adjoin $f_1(x)$, and in a similar manner also $f_2(x)$ to the system, which reduces then at once to

$$[\mathfrak{p}_1 . \mathfrak{p}_2, f_1(x), f_2(x)].$$

We may therefore consider instead of the modular system

$$[\nu\mu, f_1(x), f_2(x)],$$

systems of the form

$$[\mathfrak{p}, f_1(x), f_2(x)],$$

where $\mathfrak{p}$ is a prime ideal or the power of a prime ideal.

What has been proved above for the special values given to $f_1(x)$ and $f_2(x)$ may be proved in general where for $f_1(x)$ and $f_2(x)$ are taken any integral functions of x with integral coefficients belonging to the realm Ω.

If we assume that there is no factor common to both of these functions (since such a factor may be immediately taken out as a factor of the modular system), we may by the usual method of the algorithm of the greatest common divisor determine an algebraic integer μ belonging to the realm Ω, which may be added to the system without altering its equivalence.

In general if we assume that in the modular system

$$[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)],$$

the elements are integral functions in x whose coefficients belong to the realm $[\nu]$, and further that there is no divisor common to all the elements, then by the ordinary method of the algorithm of the

Digitized by Google

greatest common divisor we may determine an algebraic integer μ *belonging also to* $[v]$, *which is expressible as a linear function of the elements of the modular system and may consequently be added as an element to the modular system without altering its equivalence.*

The system becomes then

$$[\mu, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)].$$

In a similar manner as in the special case considered above, if

$$v\mu = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdot \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdots,$$

where $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ are prime ideals and $e_1, e_2, \ldots$ rational integers, we may consider instead of the original system, the system

$$[\mathfrak{p}_1^{e_1}, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)], \quad [\mathfrak{p}_2^{e_2}, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)], \quad \ldots,$$

whose product is equivalent to the original system.

Let us consider the system

$$[\mathfrak{p}_1^{e_1}, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)].$$

If the coefficients of any of the elements, for example $f_1(x)$, have a common factor, then since the element may be replaced by another element in which the factor is a divisor of $\mathfrak{p}_1^{e_1}$, it is seen that the modular system must be of the form

$$[\mathfrak{p}_1^{e_1}, \mathfrak{p}_1^{d_1} g_1(x), \mathfrak{p}_2^{d_2} g_2(x), \ldots, \mathfrak{p}_n^{d_n} g_n(x)],$$

where the integers $d_1, d_2, \ldots, d_n$ are not necessarily different and are either zero or divisors of e_1 including unity. We may further assume that the coefficients of none of the elements $g_i(x) (i = 1, 2, \ldots, n)$ have a common factor.

In the present discussion we shall take $e_1 = 1$, and the modular system of the form

$$[\mathfrak{p}, g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)].$$

Consider first the simpler form

$$[\mathfrak{p}, g_1(x), g_2(x)],$$

where

$$g_1(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n,$$
$$g_2(x) = \beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \ldots + \beta_m,$$
$$n \geqq m.$$

We may assume that none of the coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ is divisible by $\mathfrak{p}$, since in that case the term containing such a coef-

Digitized by Google

ficient may be dropped from the function the, equivalence of the modular system remaining unaltered.

In the realm of rational numbers the integers

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p-1,$$

form a system of incongruent residues (mod p), and consequently all integers of the realm may be distributed into p classes, where every integer belonging to a given class is congruent (mod p) to one and only one of integers $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

In the same way the integers of Ω may be distributed into $(\nu, \mathfrak{p})$ classes (Dedekind, p. 509). Denote this number of classes by $k = (\nu, \mathfrak{p})$.

Any integer in a class may be chosen as a *representative* of that class. Hence if we choose an integer from each of the k classes, we have a system of integers, which may be called a *representative system* of integers of the realm Ω with respect to the modulus $\mathfrak{p}$.

Every integer in Ω is congruent (mod $\mathfrak{p}$) to one of the representatives of these k classes.

The representative system is therefore characterized by the following properties.

1° The representatives of the system are all divisible by ν;

2° The difference of no two representatives is divisible by $\mathfrak{p}$;

3° Every algebraic integer in Ω is congruent (mod $\mathfrak{p}$) to one of the representatives.

The integer 1 being one of the integers in Ω belongs to one of the k classes, and we shall take it as a representative of the class to which it belongs, and as representatives of the other $k-1$ classes we take those algebraic integers whose norms are less than the norm of $\mathfrak{p}$.

There representatives we denote by

$$\rho_1 = 1, \rho_2, \ldots, \rho_k.$$

Since the norm of an ideal $\mathfrak{m}$ (Dedekind, p. 564) is equal to (ν, m), it is seen that $N(\mathfrak{p}) = (\nu, \mathfrak{p}) = k$. Consequently the rational integers $N(\rho_1)$, $N(\rho_2), \ldots, N(\rho_k)$ are all less than k.

If next a function $f(x)$ integral in x with coefficients that are integers in Ω, be multiplied successively by all the integers in Ω, the different functions that thus arise may in turn be classified with repect to the modulus $\mathfrak{p}$ into $k = (\nu, p)$ different groups and the k representatives that thus arise, are had when we multiply the function $f(x)$ by the k algebraic integers that constitute the representatives of the k classes. Further any

Digitized by Google

one of the representative functions may be used instead of the function $f(x)$, as it is evident that such a function when multiplied in turn by each of the k algebraic integers that constitute the representative system will give the same system of representative functions as found above.

If then $g_1(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n$, it is certain that one of the representative system of algebraic integers, say ρ_l, is such that

$$\rho_l \alpha_0 \equiv 1 \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}).$$

Hence we may replace the function $g_1(x)$ in the modular system

$$[\mathfrak{p}, g_1(x), g_2(x)]$$

by the element

$$\mathcal{G}_1(x) = \rho_l g_1(x) \equiv x^n + \overline{\alpha_1} x^{n-1} + \overline{\alpha_2} x^{n-2} + \ldots + \overline{\alpha_n} \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}),$$

where $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_n}$ are algebraic integers that are found among the integers $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$.

We call $\mathcal{G}_1(x)$ the *reduced element* of $g_1(x)$. Let $\mathcal{G}_2(x)$ be the reduced element of $g_2(x)$.

It is seen that

$$[\mathfrak{p}, g_1(x), g_2(x)] \backsim [\mathfrak{p}, \mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_2(x)].$$

Since the degree of $\mathcal{G}_2(x)$ is not greater than the degree of $\mathcal{G}_1(x)$ we have by division

$$\frac{\mathcal{G}_1(x)}{\mathcal{G}_2(x)} = Q_1(x) + \frac{R_1(x)}{\mathcal{G}_2(x)},$$

where the coefficients of $Q_1(x)$ and $R_1(x)$ are algebraic integers in Ω and where the degree of $R_1(x)$ in x is less than the degree of either $\mathcal{G}_1(x)$ or $\mathcal{G}_2(x)$.

From the above relation it is seen that

$$\mathcal{G}_1(x) = Q_1(x)\mathcal{G}_2(x) + R_1(x);$$

and consequently since

$$R_1(x) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_2(x)]$$

and

$$\mathcal{G}_1(x) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathcal{G}_2(x), R_1(x)],$$

it follows that we may adjoin the element $R_1(x)$ to the system

$$[\mathfrak{p}, \mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_2(x)]$$

Digitized by Google

and drop $\mathcal{G}_1(x)$ from it without changing the equivalence, so that

$$[\mathfrak{p}, \mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_2(x)] \backsim [p, \mathcal{G}_2(x), R_1(x)].$$

Let the reduced element of $R_1(x)$ be $H_3(x)$ and as above form the relation

$$\mathcal{G}_2(x) = Q_2(x)H_3(x) + R_2(x).$$

Adjoin $R_2(x)$ to the system, and drop from it $\mathcal{G}_2(x)$. The system which we have then to consider is

$$[\mathfrak{p}, R_1(x), R_2(x)].$$

As the degrees of the new elements that are adjoined to the system are being continuously decreased and cannot become negative, it is seen that by continuing the above process we must finally have

$$[\mathfrak{p}, H_{\nu-1}(x), H_\nu(x)],$$

and here *either* $H_{\nu-1}(x)$ is divisible by $H_\nu(x)$ (mod $\mathfrak{p}$) *or* $H_\nu(x)$ becomes an algebraic integer which is relatively prime to $\mathfrak{p}$.

In the *first* case the modular system $[\mathfrak{p}, H_{\nu-1}(x), H_\nu(x)]$ is equivalent to $[\mathfrak{p}, H_\nu(x)]$ and in the *second* case it is equivalent to $[\nu]$ and is without further interest.

In precisely the same manner the more general modular system written above

$$[\mathfrak{p}, g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)]$$

reduces to a system of the form

$$[\mathfrak{p}, F(x)] \quad \text{or to} \quad [\nu].$$

The latter case being without interest, we shall consider more closely the system

$$[\mathfrak{p}, F(x)],$$

where the element $F(x)$ may be written

$$F(x) = x^T + \gamma_1 x^{T-1} + \gamma_2 x^{T-2} + \ldots + \gamma_T,$$

in which $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_T$ are found among the quantities $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$.

The *residues* (incongruent quantities) of this modular system must have the form

$$R(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_{T-1} x^{T-1},$$

where the β's can have any of the values $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$.

The number of functions having this form is consequently k^T, and

Digitized by Google

since one of these functions is divisible by the modular system, the total number of residues of the modular system is $\nu = k^T - 1$.

Denote these ν residues by $R_1, R_2, \ldots, R_\nu$. It is easy to prove that these ν functions are incongruent $[\text{mod}\, \mathfrak{p}, F(x)]$, as are also the products

$$R_i R_1,\ R_i R_2,\ R_i R_3,\ \ldots,\ R_i R_\nu \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

We consequently have

$$(1)\quad \prod_{k=1}^{k=\nu} (x - R_i R_k) \equiv \prod_{k=1}^{k=\nu} (x - R_k) \qquad [\text{mod}\ \mathfrak{p},\ F(x)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

and also

$$\prod_{k=1}^{k=\nu} (R_i R_k) \equiv \prod_{k=1}^{k=\nu} R_k \qquad [\text{mod}\ \mathfrak{p},\ F(x)],$$

or

$$R_i^\nu \prod_{k=1}^{k=\nu} R_k \equiv \prod_{k=1}^{k=\nu} R_k \qquad [\text{mod}\ \mathfrak{p},\ F(x)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Since further $\prod_{k=1}^{k=\nu} R_k$ is not divisible by the modular system $[\mathfrak{p}, F(x)]$, it follows that

$$R_i^\nu \equiv 1 \qquad [\text{mod}\ \mathfrak{p},\ F(x)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

which is a *general form of Fermat's theorem.*

Writing for ν its value $k^T - 1$, it is seen that

$$R_i^{k^T} \equiv R_i \qquad [\text{mod}\ \mathfrak{p},\ F(x)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

and consequently also

$$x^{k^T} - x \equiv F(x)\varphi(x) \qquad [\text{mod}\ \mathfrak{p}],$$

where $\varphi(x)$ is a quantity belonging to the realm $[v.\ x]$.

Hence (mod $\mathfrak{p}$) the function $x^{k^T} - x$ is divisible by the function $F(x)$ (*cf.* Serret, *Cours d'Algèbre supérieure,* t. II, Chap. III, p. 131; 1866).

With Serret (*loc. cit.*) we say that the function $F(x)$ is *decomposable into factors* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ (mod $\mathfrak{p}$), if it is possible to determine a function $\chi(x)$ such that

$$(1)\qquad \varphi(x)\psi(x) = F(x) + \mathfrak{p}\chi(x),$$

Digitized by Google

where all the functions introduced belong to the realm $[\nu, x]$; otherwise the function $F(x)$ is *irreducible* (mod $\mathfrak{p}$).

If then the relation (1) is true, it follows at once that

$$[\mathfrak{p}, F(x)] \backsim [\mathfrak{p}, \varphi(x)\psi(x)].$$

Suppose further that $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ have no common factor (mod $\mathfrak{p}$). We may then prove that

$$[\mathfrak{p}, F(x)] \backsim [\mathfrak{p}, \varphi(x)][\mathfrak{p}, \psi(x)].$$

For the product just written is equivalent to

$$[\mathfrak{p}^2, \mathfrak{p}\psi(x), \mathfrak{p}\varphi(x), \varphi(x)\psi(x)].$$

But, since $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are relative prime to each other, their greatest common divisor (mod $\mathfrak{p}$) is ν and may be written

$$\nu \equiv \varphi(x) + \psi(x) \qquad [\text{mod}\, \mathfrak{p}].$$

Hence we have the equivalences

$$\begin{aligned}
&[\mathfrak{p}^2, \mathfrak{p}\psi(x), \mathfrak{p}\varphi(x), \varphi(x)\psi(x)] \\
&\quad \backsim [\mathfrak{p}^2, \mathfrak{p}\psi(x), \mathfrak{p}\varphi(x), \mathfrak{p}\psi(x) + \mathfrak{p}\varphi(x), \varphi(x)\psi(x)] \\
&\quad \backsim [\mathfrak{p}^2, \mathfrak{p}\psi(x), \mathfrak{p}\varphi(x), \mathfrak{p}, \varphi(x)\psi(x)] \backsim [\mathfrak{p}, \varphi(x)\psi(x)].
\end{aligned}$$

We may therefore consider next a system of the form

$$[\mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

where $\varphi(x)$ is an irreducible function (mod $\mathfrak{p}$).

This system is a *prime modular system* (*cf.* KRONECKER, *Werke*, III', p. 158).

Suppose that $\varphi(x)$ has the form

$$\varphi(x) = x^\lambda + \gamma_1 x^{\lambda-1} + \gamma_2 x^{\lambda-2} + \ldots + \gamma_\lambda,$$

where $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\lambda$ are to be found among the fixed integers $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$.

There are consequently $m = k^\lambda - 1$ residues of the system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$ which we denote by $r_1, r_2, \ldots, r_m$.

We therefore have as above

$$r_i^{k^\lambda - 1} \equiv 1 \qquad [\text{mod}\, \mathfrak{p}, \varphi(x)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

LEMMA. — *If r denotes any of the above residues and if*

$$G(r) = A_0 r^m + A_1 r^{m-1} + \ldots + A_m \equiv 0 \qquad [\text{mod}\, \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

Digitized by Google

where $A_0, A_1, \ldots, A_m$ *are integral functions in* x *whose coefficients belong to the realm* $[v]$ *and* $A_0 \not\equiv 0 \; [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$, *then the above congruence cannot have more than* m *incongruent* $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ *roots.*

We shall first prove this lemma for the special case $m = 1$.

Take the congruence

$$A_0 r + A_1 \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

where $A_0 \not\equiv 0 \; [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$, and suppose that r_1 and r_2 are two roots of this congruence, so that therefore

$$A_0 r_1 + A_1 \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

and

$$A_0 r_2 + A_1 \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

By subtraction we have

$$A_0(r_1 - r_2) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

and since A_0 is not divisible by the prime modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$, it follows that

$$r_1 \equiv r_2 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

Hence a congruence of the first degree can have at most one incongruent $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ *root.*

Returning to the general case suppose that r_i is one of the roots of the congruence

$$G(r) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

so that therefore

$$G(r) - G(r_i) = (r - r_i) G_1(r) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

where $G_1(r)$ is a function of the same nature as $G(r)$ and is at most of the $(m-1)^{\text{st}}$ degree in r.

By the method of induction, grant that the lemma has been demonstrated for functions of the $(m-1)^{\text{st}}$ degree, so that therefore

$$G_1(r) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$$

cannot have more than $m - 1$ incongruent roots, then from above since

$$r - r_i \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$$

cannot have more than one root, the theorem is proved in general.

Suppose next that the congruence

$$G(r) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$$

Digitized by Google

has exactly m incongruent roots $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ and let these roots be r_1, $r_2, \ldots, r_m$; again let

$$G(r) = A_0 r^m + A_1 r^{m-1} + \ldots + A_m,$$

and form the congruence

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 r^m + A_1 r^{m-1} + \ldots + A_m - A_0(r - r_1)(r - r_2) \ldots (r - r_m) \equiv 0 \\ \qquad\qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]. \end{array} \right.$$

This congruence is at most of the $(m-1)^{st}$ degree, since the terms $A_0 r^m$ cancel each other. It has, however, more than $(m-1)$ incongruent roots $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ since it is satisfied by the m functions $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Hence all the coefficients of this congruence must be divisible by the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$.

It follows therefore that the congruence (1) must be satisfied *identically*, and we must have

$$\begin{array}{ll} -A_1 \equiv r_1 + r_2 + \ldots + r_m & [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)], \\ +A_2 \equiv r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{m-1} r_m & [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (-1)^m A_m \equiv r_1 r_2 \ldots r_m & [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]. \end{array}$$

If therefore the congruence of the mth degree

$$G(r) \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

has exactly m roots $r_1, r_2, \ldots, r_m$, we have identically the congruence

$$G(r) \equiv A_0 \prod_{i=1}^{i=m} (r - r_i) \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

Returning to the congruence

$$r^{k^\lambda - 1} - 1 \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

it has been shown that this congruence has $m = k^\lambda - 1$ roots $r_1, r_2, \ldots, r_m$, these roots being the residues of the system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$ in which the element $\varphi(x)$ has the form

$$\varphi(x) = x^\lambda + \gamma_1 x^{\lambda-1} + \gamma_2 x^{\lambda-2} + \ldots + \gamma_\lambda.$$

The residues are consequently of the form

$$\delta_1 x^{\lambda-1} + \delta_2 {}^{\lambda-2} + \ldots + \delta_\lambda,$$

where $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\lambda$ can take any of the values $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$.

Digitized by Google

Hence it is seen that

$$r^{k^\lambda - 1} - 1 \equiv \prod [r - (\delta_1 x^{\lambda-1} + \delta_2 x^{\lambda-2} + \ldots + \delta_\lambda)] \qquad [\bmod \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

where the product extends over the totality of functions that are had when for each of the δ'_s we substitute in turn the k values $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$, excepting the one particular case in which each of the δ'_s is replaced by the ρ that is $\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

Equating the coefficients of equal powers of r on either side of the above congruence, we have the very *general form of Wilson's theorem*

$$-1 \equiv \prod (\delta_1 x^{\lambda-1} + \delta_2 x^{\lambda-2} + \ldots + \delta_\lambda),$$

where the product is to be taken over the totality of functions in which the δ'_s have the values just mentioned.

Primary prime functions.

We have written $m = k^\lambda - 1$ where $k = (\nu, \mathfrak{p}) = N(\mathfrak{p}) = p^f$, p bring is the smallest prime rational integer that is divisible by the prime ideal $\mathfrak{p}$ and where the positive rational integer f is the *degree* (Dedekind, p. 565) of the prime ideal $\mathfrak{p}$.

Hence $m = p^{\lambda f} - 1$ and the above congruence may be written

$$r^{p^{\lambda f} - 1} - 1 \equiv 0 \qquad [\bmod \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

Consider the series of functions

$$[\psi(x)]^{p^0}, \quad [\psi(x)]^{p^1}, \quad [\psi(x)]^{p^2}, \quad \ldots,$$

where $\psi(x)$ is any arbitrary integral functions in x whose coefficients are integers in Ω.

In this series we must finally come to a function $[\psi(x)]^{p^s}$ which is $\equiv [\psi(x)]^{p^0} \pmod{\mathfrak{p}, \varphi(x)}$; for if this does not happen before, it is certainly true for $s = \lambda f$.

We shall call the smallest rational integer h different from zero which satisfies the congruence

$$[\psi(x)]^{p^h} \equiv \psi(x) \qquad [\bmod \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

the *height* of the function $\psi(x)$ with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$.

Digitized by Google

Raising both sides of the above congruence to the p^h power, we have

$$[\psi(x)]^{p^h p^h} \equiv [\psi(x)]^{p^h} \equiv \psi(x) \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

and consequently also

$$[\psi(x)]^{p^{kh+t}} \equiv [\psi(x)]^{p^t} \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

If therefore $t \equiv s$ (mod h), *then is*

$$[\psi(x)]^{p^s} \equiv [\psi(x)]^{p^t} \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

and reciprocally if

$$[\psi(x)]^{p^s} \equiv [\psi(x)]^{p^t} \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

then is

$$t \equiv s \qquad (\text{mod } h).$$

We have indirectly proved also the following theorems :

I. *If s is incongruent to t* (mod h), *then is also*

$$[\psi(x)]^{p^s} \not\equiv [\psi(x)]^{p^t} \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)];$$

II. *If*

$$[\psi(x)]^{p^s} \not\equiv [\psi(x)]^{p^t} \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

then is s incongruent to t (mod h).

Consider now the series of the infinite number of functions

$$[\psi(x)]^{p^0}, \quad [\psi(x)]^{p^1}, \quad [\psi(x)]^{p^2}, \quad [\psi(x)]^{p^3}, \quad \ldots,$$

with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$.

The first h of these functions, where h is the height of the function $\psi(x)$ with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$ are incongruent with respect to this system. The next h functions are repeated in the same order as the first h of then; consequently we may (*cf.* DEDEKIND, p. 571) call the h functions

$$[\psi(x)]^{p^0}, \quad [\psi(x)]^{p^1}, \quad [\psi(x)]^{p^2}, \quad \ldots, \quad [\psi(x)]^{p^{h-1}},$$

the *period* of the function $\psi(x)$ with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$.

It is clear that the period of any of the functions $[\psi(x)]^{p^t}$, where t is a rational integer, contains the same functions with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$ as the period of the function $\psi(x)$.

Suppose next in the congruence

$$[\psi(x)]^{p^{\lambda f-1}} - 1 \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$$

Digitized by Google

that $f = 1$, and consider the congruence

$$[\psi(x)]^{p^\lambda} \equiv \psi(x) \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

Take first in the realm of rational numbers the modular system

$$[p, \Phi(x)],$$

in which p is the prime rational integer that is divisible by the prime ideal $\mathfrak{p}$, and $\Phi(x)$ has the form

$$\Phi(x) = x^\lambda + g_1 x^{\lambda-1} + g_2 x^{\lambda-2} + \ldots + g_\lambda,$$

where $g_1, g_2, \ldots, g_\lambda$ can have any of the values $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

There are consequently $p^\lambda - 1$ residues of the modular system

$$[p, \Phi(x)].$$

Hence if $\Psi(x)$ is any integral function of x whose coefficients are rational integers, we have

$$[\Psi(x)]^{p^\lambda} \equiv \Psi(x) \qquad [\text{mod } p, \Phi(x)].$$

Further writing as above

$$\varphi(x) = x^\lambda + \gamma_1 x^{\lambda-1} + \gamma_2 x^{\lambda-2} + \ldots + \gamma_\lambda,$$

suppose that

$$\begin{aligned} g_1 &\equiv \gamma_1 \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}), \\ g_2 &\equiv \gamma_2 \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}), \\ &\ldots\ldots \\ g_\lambda &\equiv \gamma_\lambda \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}), \end{aligned}$$

that is, the quantities g_1 and γ_1; g_2 and γ_2; $\ldots$; g_λ and γ_λ are algebraic integers belonging to the same classes in the distribution that we made on page 17.

It follows at once that the modular system $[p, \Phi(x)]$ is divisible by the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$ and consequently that

$$[\Psi(x)]^{p^\lambda} \equiv \Psi(x) \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

From this we see that *every integral function in x with rational integral coefficients has a height with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$ which is equal to the degree of the function $\varphi(x)$.*

We shall now show reciprocally that *every function of the height λ with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$ is congruent* $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ *to an integral function in x of degree not greater than $\lambda - 1$ whose coefficients are rational integers that have been reduced* (mod p).

Digitized by Google

In accordance with what was proved above, the congruence

$$r^{p^\lambda} - r \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

is satisfied by the p^λ functions

$$g_1 x^{\lambda-1} + g_2 x^{\lambda-2} + \ldots + g_\lambda,$$

where the g's take the values $0, 1, 2, \ldots, p-1$, and further since these p^λ functions are all incongruent $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$, it follows that the congruence

$$r^{p^\lambda} - r \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

has as many incongruent $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ roots as the degree $d = p^\lambda$ of the congruence, and consequently *see* p. 23 (if $r_1, r_2, \ldots, r_{d-1}, r_d = 0$) are the roots of this congruence, we have the identical congruence

$$r^{p^\lambda} - r \equiv r(r - r_1)(r - r_2)\ldots(r - r_{d-1}) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

If then $\chi(x)$ is a function of the height λ with respect to the modular system $[p, \varphi(x)]$, then we must have

$$[\chi(x)]^{p^\lambda} - \chi(x) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

and therefore

$$\chi(x)[\chi(x) - r_1][\chi(x) - r_2]\ldots[\chi(x) - r_{d-1}] \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

From this it follows that

$$\chi(x) \equiv r \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

where r is one of the integral functions $r_1, r_2, \ldots, r_{d-1}, r_d = 0$, whose degree is not greater than $\lambda - 1$ in x and whose coefficients are rational integers, reduced, mod p.

Reciprocally: if $\chi(x)$ is congruent $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ to r, where r is an integral function in x whose coefficients are rational integers, so that

$$\chi(x) \equiv r \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

then is also

$$[\chi(x)]^{p^\lambda} \equiv r^{p^\lambda} \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

But since

$$r^{p^\lambda} \equiv r \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

it follows that

$$[\chi(x)]^{p^\lambda} \equiv r \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

and consequently

$$[\chi(x)]^{p^\lambda} \equiv \chi(x) \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

We have then the theorem: *every integral function in x whose coefficients belong to $[v]$, which is congruent $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ to an inte-*

Digitized by Google

gral function in x whose coefficients are rational integers, has the height λ with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$; and every integral function in x whose coefficients belong to $[v]$ that has the height λ with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$ is congruent with respect to this system to an integral function in x of degree not greater than $\lambda - 1$ with rational integral coefficients, reduced, mod p.

We know that if

$$R(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = l\alpha^n + l_1\alpha^{n-1}\beta + \ldots,$$

is an integral function in the quantities $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, and $l, l_1, \ldots$, are rational integers that

$$[R(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)]^p \equiv R(\alpha^p, \beta^p, \gamma^p, \ldots) \qquad (\text{mod } p),$$

where p is a prime integer.

Hence also, if p is divisible by the prime ideal p,

$$[R(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)]^p \equiv R(\alpha^p, \beta^p, \gamma^p, \ldots) \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}).$$

Suppose next that $\psi(x)$, any function of the realm $[v, x]$, has the height h and form the symmetric function

$$\sigma = \mathbf{S}\{[\psi(x)], [\psi(x)]^p, [\psi(x)]^{p^2}, \ldots, [\psi(x)]^{p^{h-1}}\},$$

so that consequently σ is an integral function in x whose coefficients are integers in Ω.

It is seen that

$$\begin{aligned}\sigma^p &= \left(\mathbf{S}\{[\psi(x)], [\psi(x)]^p, [\psi(x)]^{p^2}, \ldots, [\psi(x)]^{p^{h-1}}\}\right)^p \\ &\equiv \mathbf{S}\{[\psi(x)]^p, [\psi(x)]^{p^2}, [\psi(x)]^{p^3}, \ldots, [\psi(x)]^{p^h}\} \\ &\equiv \mathbf{S}\{[\psi(x)]^p, [\psi(x)]^{p^2}, [\psi(x)]^{p^3}, \ldots, \psi(x)\} \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}).\end{aligned}$$

or

$$\sigma^p \equiv \sigma \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}).$$

Since

$$\sigma^{p^2} \equiv \sigma^p \equiv \sigma \qquad (\text{mod } \mathfrak{p}),$$

it follows also that

$$\sigma^{p^\lambda} \equiv \sigma \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

From this it is seen that since the height of the function σ with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$ is λ, the function σ is congruent $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ to an integral function in x of degree not greater than $\lambda - 1$, whose coefficients are rational integers, reduced, mod p.

Digitized by Google

In the same way it may be proved that *every integral symmetric function of the h functions*

$$[\psi(x)],\quad [\psi(x)]^{p^1},\quad [\psi(x)]^{p^2},\quad \ldots,\quad [\psi(x)]^{p^{h-1}},$$

is congruent $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ *to an integral function in* x *of degree not greater than* $\lambda - 1$, *whose coefficients are rational integers, reduced,* mod p.

Let us next form the product

$$\{r - \psi[x]\}\{r - [\psi(x)]^p\}\{r - [\psi(x)]^{p^2}\}\ldots\{r - [\psi(x)]^{p^{h-1}}\},$$

which we denote by $P(r, x)$.

Developing this product in powers of r, we have

$$P(r, x) = r^h + c_1 r^{h-1} + c_2 r^{h-2} + \ldots + c_h,$$

where $c_1, c_2, \ldots . c_h$ are integral symmetric functions of the functions

$$\psi(x),\quad [\psi(x)]^p,\quad [\psi(x)]^{p^2},\quad \ldots,\quad [\psi(x)]^{p^{h-1}}.$$

The function $P(r, x)$ *is therefore congruent* $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ *to an integral function of the* h^{th} *degree in* r, *whose coefficients are integral functions in* x *of degree not greater than* $\lambda - 1$, *and the coefficients of these functions in* x *are rational integers, reduced,* mod p.

The function $P(r, x)$ may be called *a prime function* (Dedekind, p. 571); for it is easily proved that it is not possible to determine two functions $f(r, x)$, $g(r, x)$ integral in r and x such that

$$P(r, x) \equiv f(r, x)\, g(r, x) \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

Returning to the congruence

$$[\psi(x)]^{p^{\lambda f}} \equiv \psi(x) \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

it is seen that if h is the height of the function $\psi(x)$ with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$, then

$$[\psi(x)]^h \equiv \psi(x) \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

Hence it follows that

$$[\psi(x)]^{p^{\lambda f}} \equiv [\psi(x)]^h \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

From this congruence (*see* p. 25) we must also have the congruence

$$h \equiv \lambda f \qquad (\text{mod } h),$$

and therefore λf must be divisible by h.

Digitized by Google

We have therefore the theorem : *The height of any function with respect to the modular system* $[p, \varphi(x)]$ *is a divisor of* λf, *where* f *is the degree of the prime ideal* $\mathfrak{p}$, *and* λ *the degree of the function* $\varphi(x)$ *in* x.

We shall next show that if h *is a divisor of* λf, *there exist functions of the height* h *with respect to the modular system* $[p, \varphi(x)]$.

If there exist such a function, say $\psi(x)$, then evidently there exist h such functions, viz.

$$\psi(x), \quad [\psi(x)]^p, \quad [\psi(x)]^{p^2}, \quad \ldots, \quad [\psi(x)]^{p^{h-1}}.$$

Hence on the supposition that there exist functions of the height h with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$, it is seen that we can distribute all such functions into groups, there appearing h functions in each group.

Denote the number of groups by χ_h and consequently the number of incongruent functions of the height h with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$ by $h \cdot \chi_h$.

Since λf is divisible by h, we may write $\lambda f = hg$, where g is a rational integer.

Also since

$$\frac{p^{\lambda f} - 1}{p^h - 1} = 1 + p^h + p^{2h} + \ldots + p^{(g-1)h},$$

so that $\frac{p^{\lambda f} - 1}{p^h - 1}$ is a positive integer, it follows that

$$\frac{[\psi(x)]^{p^{\lambda f}-1} - 1}{[\psi(x)]^{p^h-1} - 1} = G(x),$$

where $G(x)$ is an integral function in x of degree $p^{\lambda f} - p^h$ with integral coefficients belonging to the realm Ω.

Hence

$$[\psi(x)]^{p^{\lambda f}} - \psi(x) \equiv \{[\psi(x)]^{p^h} - \psi(x)\} G(x) \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)].$$

Since

$$[\psi(x)]^{p^{\lambda f}} - \psi(x) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

has $p^{\lambda f}$ incongruous $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ roots and since $G(x)$ cannot have more than $p^{\lambda f} - p^h$ such roots, it follows that the congruence

$$[\psi(x)]^{p^h} - \psi(x) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$$

must have at least p^h such roots. Since this congruence cannot have more than this number of incongruous $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ roots, *it follows that the*

Digitized by Google

congruence

$$[\psi(x)]^{p^h} - \psi(x) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

has p^h incongruent $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ *roots.*

It then we have a function $\varpi(x)$, which has the height h with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$, it satisfies the congruence

$$(1) \qquad [\varpi(x)]^{p^h} \equiv \varpi(x) \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

and reciprocally if the fonction $\varpi(x)$ satisfies the congruence (1), it has a height h or a height d, where d is a divisor of h.

Hence we see that each of the incongruent $[\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)]$ roots which satisfy the congruence (1) has either the height h or a height d, where d is a divisor of h.

If d is a divisor of h, then the number of the incongruent functions of the height d with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$ is, employing the above notation, $d\chi_d$.

It follows therefore that the number of the incongruent functions of the height h or the height d, where d is a divisor of h with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$ is

$$\sum d\chi_d,$$

where the summation is taken over all the divisors of h, including h itself.

Since this number is also equal to p^h, it follows that

$$p^h = \sum d\chi_d.$$

We have seen (p. 27) that

$$(\mathrm{I}) \qquad r^{p^h} - r \equiv \prod (r - r_i) \qquad [\text{mod } \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

where the product is to be taken over a system of p^h incongruous roots which have the height h, or the height d, d being a divisor of h, with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$.

If one of the roots r_k, say, of the above congruence is of the height h with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$, the product

$$(r - r_k)(r - r_k^p)(r - r_k^{p^2})\ldots(r - r_k^{p^{h-1}}),$$

enters as a factor in (I).

We may write for this product the function $P(r, x)$ which is integral in r and x, of the h degree in r, and in x not greater than the $\lambda - 1$ degree and whose coefficients are rational integers, reduced, mod p.

Digitized by Google

In the same way if d is a divisor of h, there enters as a factor in (I) the product

$$(r - r_\nu)(r - r_\nu^p)(r - r_\nu^{p^2})\ldots(r - r_\nu^{p^{d-1}}),$$

where r_ν is a function of the height d with respect to the modular system.

We may therefore replace this product by another prime function integral in r and x, of the dth degree in r and a degree not greater than $\lambda - 1$ in x, whose coefficients are rational integers, reduced, mod p.

It is thus evident that

$$r^{p^h} - r \equiv \prod \mathrm{P}(r, x) \qquad [\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}, \varphi(x)],$$

where the product is to be taken over a certain number of prime functions.

Such prime functions in which the coefficients of the highest powers of r are unity are called *primary prime functions.*

If we denote by ω_d the number of primary prime functions that occur to the height d with respect to the modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$, it may be shown that (¹)

$$\sum d\omega_d = \sum d\chi_d = p^h.$$

Consequently the above product is to be taken over all the existing primary prime functions $\mathrm{P}(r, x)$ *whose degree in r is h or a divisor of h and in x the degree is not greater than* $\lambda - 1$, whose coefficients are reduced (mod$p$).

The theorem has been proved by Dedekind (p. 571-572) for the simple case of algebraic integers taken with respect to a prime ideal. I shall therefore call it *Dedekind's theorem.* It seems to have, a similar significance in the extended realm of rationality as the theorems of Wilson and Fermat in the usual realm.

In his lectures at Berlin, *Professor Frobenius* worked out in greater detail the Dedekind results, and, following his methods, I have derived the above results for the algebraic functions in the realm $[v, x]$ taken with respect to the prime modular system $[\mathfrak{p}, \varphi(x)]$. In a doctor's thesis at Paris I have extended the theorem for the case of several variables (see *Ann. de l'École Norm. Supér.* 1901).

As none of the prime functions in the above product is repeated, we may write the following équivalence

$$(\mathrm{A}) \qquad [\mathfrak{p}, \varphi(x), r^{p^h} - r] \backsim \prod [\mathfrak{p}, \varphi(x), \mathrm{P}(r, x)],$$

(¹) See *American Journal of Mathematics,* Jan. 1902.

Digitized by Google

where the product is to be taken over all possible modular systems of the form $[\mathfrak{p}, \varphi(x), P(r, x)]$, in which for the primary prime function $P(r, x)$ we write all possible primary prime functions whose degree in r is h or a divisor of h, and whose degree in x is not greater than $\lambda - 1$, and whose coefficients are reduced (mod p).

For as we confine ourselves to rational integral coefficients in these primary prime functions, it is evident, since any two of these functions $P_m(r, x)$ and $P_n(r, x)$ have no common divisor in r, that we can find two functions $\overline{P}_m(r, x)$ and $\overline{P}_n(r, x)$ integral in r and x with rational integral coefficients such that

$$P_m(r, x)\,\overline{P}_m(r, x) + P_n(r, x)\,\overline{P}_n(r, x) = k(x),$$

where $k(x)$ has no common divisor with $\varphi(x)$ [mod $\mathfrak{p}$].

It is also seen that we may determine two functions $\overline{k}(x)$ and $\overline{\varphi}(x)$ integral in x with coefficients in $[\nu]$ so that

$$k(x)\,\overline{k}(x) + \varphi(x)\,\overline{\varphi}(x) = \alpha,$$

where α is an integer in $[\nu]$.

Finally it is seen that the greatest common divisor of α and $\mathfrak{p}$ is ν, or $\alpha + \mathfrak{p} = \nu$.

Hence the product

$$[\mathfrak{p}, \varphi(x), P_m(r, x)]\,[\mathfrak{p}, \varphi(x), P_n(r, x)],$$

is equivalent to

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [\mathfrak{p}^2, \mathfrak{p}\varphi(x), \mathfrak{p}P_n(r, x), \varphi(x)^2, \varphi(x)\,P_n(r, x), \\ \quad \mathfrak{p}P_m(r, x), \varphi(x)\,P_m(r, x), P_m(r, x)\,P_n(r, x)]. \end{array} \right.$$

From the elements $\mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{p}\varphi(x)$, $\mathfrak{p}P_n(r, x)$, $\mathfrak{p}P_m(r, x)$ we construct the system

$$[\mathfrak{p}^2, \mathfrak{p}\varphi(x), \mathfrak{p}P_n(r, x), \mathfrak{p}P_m(r, x)] \backsim \mathfrak{p}[\mathfrak{p}, \varphi(x), P_m(r, x), P_n(r, x)] \backsim \mathfrak{p}[\nu] \backsim \mathfrak{p}.$$

As we may now adjoin $\mathfrak{p}$ to the system (I), we form from the elements $\mathfrak{p}\varphi(x)$ [which may also be adjoined to (I)], $\varphi(x)^2$, $\varphi(x)P_n(r, x)$ and $\varphi(x)\,P_m(r, x)$ the system

$$\varphi(x)\,[\mathfrak{p}, \varphi(x), P_n(r, x), P_m(r, x)] \backsim \varphi(x)\,[\nu] \backsim \varphi(x).$$

Hence the system (I) is equivalent to

$$[\mathfrak{p}, \varphi(x), P_m(r, x)\,P_n(r, x)],$$

and consequently also the equivalence (A).

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR LA

DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS,

PAR HELGE VON KOCH (Stockholm).

Les résultats dont je vais dire quelques mots concernent la fonction $f(x)$ de Riemann et les fonctions numériques analogues [1].

Soit x un nombre positif donné; désignons par $F(x)$ le nombre des nombres premiers inférieurs à x et définissons avec Riemann la fonction $f(x)$ en posant

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2} F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3} F\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots.$$

Définissons encore la fonction numérique $\psi(x, r)$ par la formule

$$\psi(x, r) = \sum_{p<x} p^{-r} \log p + \sum_{p^2<x} p^{-2r} \log p + \ldots,$$

la première somme s'étendant à tous les nombres premiers inférieurs à x, la seconde à tous les nombres premiers inférieurs à $x^{\frac{1}{2}}$ et ainsi de suite.

Ces fonctions f et ψ sont liées par la relation

$$f(x) = \int_0^\infty \psi(x, r)\, dr.$$

Pour trouver une expression de $\psi(x, r)$ nous prenons comme point de départ la formule d'Euler :

$$\Sigma p^{-s} \log p + \Sigma p^{-2s} \log p + \ldots = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$

s étant supposé réel et plus grand que 1 et $\zeta(s)$ étant la fonction de

(1) On trouvera la démonstration de ces résultats dans un Mémoire qui sera publié dans les *Mathematische Annalen*.

Digitized by Google

Riemann définie, tant que la partie réelle $\mathrm{R}s > 1$, par la formule

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots.$$

Dans cette formule, remplaçons s par $r + \nu s$, ν étant un nombre positif entier, et multiplions les deux membres par

$$\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} x^{\nu s}.$$

Faisant la somme de toutes les égalités obtenues en prenant successivement

$$\nu = 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots,$$

et remarquant que la somme des premiers membres est une série multiple absolument convergente, il vient

$$\Sigma p^{-r} \log p \left[1 - e^{-\left(\frac{x}{p}\right)^s}\right] + \Sigma p^{-2r} \log p \left[1 - e^{-\left(\frac{x}{p^2}\right)^s}\right] + \ldots = \Psi(x, s, r),$$

où

$$\Psi(x, s, r) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} x^{\nu s} \frac{\zeta'(r + \nu s)}{\zeta(r + \nu s)}.$$

On démontre sans difficulté que la série du premier membre converge *uniformément* pour les grandes valeurs de s. Pour passer à la limite ($s = \infty$) il est donc permis de mettre dans chaque terme $s = \infty$.

Or, on a

$$\lim_{s=\infty} \left[1 - e^{-\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^s}\right] = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad p^\lambda < x, \\ 0, & \text{si} \quad p^\lambda > x \end{cases}$$

(le cas $p^\lambda = x$ est exclu si, comme nous le supposerons, x n'est pas un nombre entier).

Le premier membre de notre formule se réduit donc à $\psi(x, r)$ et l'on obtient

$$\psi(x, r) = \lim_{s=\infty} \Psi(x, s, r).$$

On trouve de même

$$f(x) = \int_0^\infty \lim_{s=\infty} \Psi(x, s, r)\, dr.$$

Pour ce qui va suivre, il est essentiel d'observer qu'on n'a pas besoin d'aller jusqu'à la limite $s = \infty$: pour avoir une approximation suffisante, il suffit de prendre

$$s \geqq 2x \log x.$$

Digitized by Google

On peut démontrer, en effet, que, *dès que s satisfait à cette condition, l'expression*

$$(1) \qquad \int_0^\infty \Psi(x, s, r)\,dr$$

ne diffère de $f(x)$ que par une quantité inférieure à un nombre fixe.

Or, si l'on décompose $\frac{\zeta'}{\zeta}$ en éléments simples, en s'appuyant sur le théorème fondamental de M. Hadamard (*Journal de Mathématiques*, 1893), nos expressions prennent des formes plus commodes pour le but que nous nous proposons.

Après des calculs assez longs, mais très élémentaires, on parvient à la formule suivante :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty \Psi(x, s, r)\,dr &= \mathrm{Li}(x) - \log 2 + \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2-1)x\log x} \\ &\quad + \alpha(x, s) - \frac{1}{\log x}\sum_\rho \alpha(x, s, \rho)\frac{s x^\rho}{\rho(s-\rho)}. \end{aligned} \right.$$

$\mathrm{Li}(x)$ désignant le *logarithme intégral* de x et la somme Σ_ρ s'étendant à tous les zéros imaginaires de la fonction $\zeta(s)$. Les fonctions $\alpha(x, s)$ et $\alpha(x, s, \rho)$ qui figurent dans cette formule sont exprimées par des intégrales définies et jouissent des propriétés suivantes :

$$\lim_{s=\infty} \alpha(x, s) = 0,$$

$$\lim_{s=\infty} \alpha(x, s, \rho)\frac{x^\rho}{\rho\log x} = \int_0^\infty \frac{x^{\rho-r}}{\rho-r}\,dr.$$

Si l'on prenait $s = \infty$, la formule (2) se réduirait à la formule de Riemann :

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)x\log x} - \Sigma_\rho \mathrm{Li}(x^\rho),$$

qui, comme l'on sait, a été rigoureusement démontrée par les travaux de M. Hadamard et de M. von Mangoldt. Mais on verra qu'il y a avantage de prendre $s = 2x\log x$ au lieu d'aller jusqu'à la limite ($s = \infty$).

On peut démontrer, en effet, que les fonctions $\alpha(x, s)$ et $\alpha(x, s, \rho)$ satisfont aux inégalités

$$\begin{aligned} |\alpha(x, s)| &< k \\ |\alpha(x, s, \rho)| &< k \end{aligned} \qquad (\text{dès que } s \geqq 2x\log x),$$

k désignant une constante. De là et du résultat énoncé plus haut sur la

Digitized by Google

différence entre $f(x)$ et l'intégrale (1), il résulte que, *pour*

$$s \geqq 2x \log x$$

l'expression

$$\mathrm{Li}(x) - \frac{1}{\log x} \sum_{\rho} \alpha(x, s, \rho) \frac{sx^{\rho}}{\rho(s-\rho)}$$

ne diffère de la fonction $f(x)$ que par une quantité inférieure à un nombre fixe.

Il est facile de démontrer que la série qui figure dans cette expression converge *absolument* et *uniformément* par rapport à x dans tout intervalle fini. Ce sont là des avantages que présente cette série sur celle qui figure dans la formule de Riemann.

On pourrait se servir de ce résultat pour le calcul de la fonction $f(x)$. Mais, pour cela, il faudrait calculer les racines ρ, ce qui paraît extrêmement difficile; et d'ailleurs la série présente encore cet inconvénient que la convergence devient moins rapide à mesure que x augmente.

Si la formule obtenue n'est pas commode pour le *calcul* de $f(x)$, elle est, semble-t-il, intéressante pour l'*étude* des propriétés de cette fonction. Ainsi, elle permet de démontrer [1] le théorème suivant, sur l'ordre de grandeur de la différence $f(x) - \mathrm{Li}(x)$:

Si l'on admet, avec Riemann, que la partie réelle de chacun des zéros ρ est égale à $\frac{1}{2}$ [2], *on obtient*

$$|f(x) - \mathrm{Li}(x)| < k \log x \sqrt{x}$$

k désignant une constante.

Comme la différence $f(x) - \mathrm{F}(x)$ est de l'ordre de $\sqrt{x}$, cette même formule s'applique à la fonction $\mathrm{F}(x)$, qui exprime combien il y a de nombres premiers inférieurs à x.

---

(1) Une autre démonstration, fondée également sur l'emploi de la fonction $1 - e^{-x^2}$, se trouve dans mon Mémoire *Sur la distribution des nombres premiers* (*Acta mathematica*, t. XXIV).

(2) On sait que Riemann (*Math. Werke*, I. Aufl., p. 139) a énoncé comme très probable ce théorème, qui paraît être d'une importance fondamentale pour la théorie des nombres premiers. Malgré bien des efforts, on n'a pu encore le démontrer rigoureusement. Mais, d'après une Note récente de M. Jensen (*Acta mathematica*, t. XXII), on peut espérer que cette lacune ne tardera pas à être comblée.

Digitized by Google

SUR LE

COVARIANT RÉSOLVANT DE LA FORME BINAIRE DU CINQUIÈME ORDRE,

PAR M. RAOUL PERRIN (PARIS).

Dans un Mémoire publié en 1884 dans l'*American Journal*, t. VI, M. Macclintock mentionne comme nouvelle la résolvante sextique

$$W = 25T^2 - UP = 0$$

de l'équation du cinquième degré $U = 0$, en ajoutant qu'elle aurait été obtenue par Schulenburg en 1881, sans une faute de calcul qui avait vicié ses résultats et dont personne ne s'était aperçu depuis.

J'avais annoncé dès le mois de décembre 1882 l'existence de cette résolvante covariante de U, en indiquant très sommairement le principe de la méthode suivie, dans une Note publiée dans le Tome XI (1882-1883) du *Bulletin de la Société mathématique de France* (*Sur les cas de résolubilité par radicaux de l'équation du cinquième degré*).

Cette résolvante que les mathématiciens américains ont qualifiée de *centrale*, par opposition aux autres résolvantes antérieurement connues, est considérée par eux comme la plus simple et la plus commode. Dans un Mémoire de 1898 (*American Journal*, t. XX), M. Macclintock donne l'expression de l'une quelconque des racines de W en fonction des cinq autres, et aussi en fonction des racines de U : cette dernière expression diffère sensiblement, au moins en apparence, de celle qui résulte immédiatement de la marche que j'avais suivie en 1882 pour obtenir la résolvante $W = 0$. Il y a donc encore quelque intérêt à faire connaître en détail cette marche et les calculs qui permettent d'arriver au résultat dont il s'agit. Ce sera l'objet de la première Partie de ce Travail; dans une seconde Partie j'étudierai le covariant W lui-même au point de vue de la théorie des formes, ce qui n'a pas encore été fait à ma connaissance, et j'en déduirai quelques conséquences intéressantes au point de vue de la résolution de l'équation du cinquième degré, tant par radicaux, quand cela est possible, que par l'emploi des fonctions elliptiques.

Digitized by Google

I.

Soit l'équation du cinquième degré, privée du second terme et mise sous la forme type

$$(1)\qquad U \equiv u[x^5 + 10hx^3 + 10nx^2 + 5(u^2 s - 3h^2)x + u^2 u' - 2hn] = 0,$$

dans laquelle u, h, n, s, u' sont repectivement les péninvariants dits *principaux,* obtenus en fonction des coefficients a, b, c, d, e, f de la forme complète

$$V = aX^5 + 5bX^4Y + 10cX^3Y^2 + 10dX^2Y^3 + 5eXY^4 + fY^5,$$

par les formules connues

$$(2)\qquad \begin{cases} u = a, \\ h = ac - b^2, \\ n = a^2 d - 3abc + 2b^3, \\ s = ae - 4bd + 3c^2, \\ u' = a^2 f - 5abe + 2acd + 8b^2 d - 6bc^2, \end{cases}$$

et U dérivant de V par la substitution

$$X = x - by, \qquad Y = ay$$

et l'hypothèse $y = 1$.

Soient x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 les cinq racines de U, et posons

$$(3)\qquad x_i = \theta^i j + \theta^{2i} k + \theta^{3i} l + \theta^{4i} m \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4),$$

θ étant une racine imaginaire cinquième de l'unité.

De (3) on déduit

$$x_i^2 = \theta^{2i} j^2 + \theta^{4i} k^2 + \theta^i l^2 + \theta^{3i} m^2 + 2(\theta^{3i} jk + \theta^{4i} jl + \theta^i km + \theta^{2i} lm + jm + kl),$$

et, par suite

$$\sum_i x_i^2 = 10(jm + kl).$$

On trouverait de même

$$\sum_i x_i^3 = 15(j^2 l + k^2 j + l^2 m + m^2 k),$$

$$\sum_i x_i^4 = 20(j^3 k + k^3 m + l^3 j + m^3 l) + 30(j^2 m^2 + k^2 l^2) + 120jklm,$$

$$\sum_i x_i^5 = 5(j^5 + k^5 + l^5 + m^5) + 100(j^3 lm + k^3 jl + l^3 km + m^3 jk)$$
$$+ 150(jl^2 m^2 + kj^2 l^2 + lk^2 m^2 + mj^2 k^2).$$

Digitized by Google

Égalant aux expressions données par les formules de Newton, et posant, pour abréger,

$$(4)\quad \begin{cases} jm = \alpha, & kl = \beta, \\ j^2 l + m^2 k = \gamma, & k^2 j + l^2 m = \delta, \\ j^3 k + m^3 l = \varepsilon, & k^3 m + l^3 j = \zeta, \\ j^5 + m^5 = \lambda, & k^5 + l^5 = \mu. \end{cases}$$

Il viendra

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2h, \\ \gamma + \delta = -2n, \\ \varepsilon + \zeta + \frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + 6\alpha\beta = 13h^2 - u^2 s, \\ \lambda + \mu + 20(\alpha\gamma + \beta\delta) + 30(\alpha\delta + \beta\gamma) = 102hn - u^2 u'. \end{cases}$$

Ce qu'on peut encore écrire

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha + \beta = -2h, \\ \gamma + \delta = -2n, \\ \varepsilon + \zeta + 3\alpha\beta = 7h^2 - u^2 s, \\ \lambda + \mu + 10(\alpha\delta + \beta\gamma) = 22hn - u^2 u'. \end{cases}$$

Les huit quantités α, β, γ, δ, ε, ζ, λ, μ sont en outre liées par les quatre identités suivantes, faciles à vérifier :

$$(6)\quad \begin{cases} \gamma\delta = \alpha\zeta + \beta\varepsilon, \\ \varepsilon\zeta = \alpha\delta^2 + \beta\gamma^2 - 4\alpha^2\beta^2, \\ \gamma\varepsilon + \delta\zeta = \alpha\mu + \beta\lambda + \beta^2\gamma + \alpha^2\delta, \\ \delta\lambda + \gamma\mu = \varepsilon^2 + \zeta^2 + \beta\delta^2 + \alpha\gamma^2 - 4\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2). \end{cases}$$

Il est clair que, si, au moyen des huit équations (5) et (6), on peut obtenir les valeurs de ces huit quantités, en fonction de u, h, n, s et u', on obtiendra j^5 et m^5 par l'équation du second degré

$$(7)\quad X^2 - \lambda X + \alpha^5 = 0$$

et de même k^5 et l^5 par l'équation du second degré

$$(8)\quad Y^2 - \mu Y + \beta^5 = 0.$$

et l'on en déduira l'expression des cinq racines de (1), au moyen des formules (3).

Cherchons donc à résoudre le système des équations (5) et (6). Nous

Digitized by Google

poserons tout d'abord

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha = -h + v, \\ \beta = -h - v, \\ \gamma = -n - vz, \\ \delta = -n + vz, \end{cases}$$

ce qui permet de supprimer les deux premières équations (5) et réduit les quantités inconnues à 6, savoir : ε, ζ, λ, μ, v et z. Les équations subsistantes deviennent, en y portant les valeurs de α, β, γ, δ tirées de (9),

$$(10)\qquad \begin{cases} \varepsilon + \zeta = 4h^2 - u^2 s + 3v^2, \\ \lambda + \mu = 2hn - u^2 u' - 20 v^2 z, \\ h(\varepsilon + \zeta) + v(\varepsilon - \zeta) = v^2 z^2 - n^2, \\ \varepsilon\zeta = -2hv^2 z^2 - 4nv^2 z - 4v^4 + 8h^2 v^2 - 2hn^2 - 4h^4, \\ h(\lambda + \mu) + v(\lambda - \mu) - n(\varepsilon + \zeta) - vz(\varepsilon - \zeta) = -2nv^2 - 4hv^2 z - 2h^2 n, \\ n(\lambda + \mu) - vz(\lambda - \mu) + \varepsilon^2 + \zeta^2 - 2hv^2 z^2 + 4nv^2 z + 8v^4 - 8h^4 - 2hn^2 = 0. \end{cases}$$

Pour éliminer ε, ζ, λ, μ, tirons $\varepsilon + \zeta$ de la première équation (10), $\lambda + \mu$ de la deuxième; la troisième donnera alors l'expression suivante pour $\varepsilon - \zeta$:

$$(11)\qquad \varepsilon - \zeta = \frac{1}{v}[v^2(z^2 - 3h) + u^3 t],$$

t étant le péninvariant défini dans la théorie de la forme du cinquième ordre par l'identité (ou syzygie)

$$(12)\qquad n^2 + 4h^3 = n^2 hs - u^3 t.$$

La cinquième équation (10) donnera de même

$$(13)\qquad \lambda - \mu = \frac{1}{v}[v^2(z^3 + 13hz + n^2) + u^2(tz + h')],$$

h' étant le péninvariant gauche défini dans la théorie de la forme du cinquième ordre par la syzygie

$$(14)\qquad uh' = hu' - ns.$$

D'autre part, de la première et de la quatrième des équations (10) on tire, en tenant compte de l'équation (12),

$$(15)\qquad \varepsilon^2 + \zeta^2 = 17v^4 + (4hz^2 + 8nz + 8h^2 - 6u^2 s)v^2 + u^2(u^2 s^2 - 4uht - 4h^2 s) + 8h^4.$$

La dernière des équations (10) devient alors, en ordonnant par rapport

Digitized by Google

à v,

$$(16)\quad 25v^4-(z^4+11hz^2+9nz+6u^2s-8h^2)v^2-u^3[tz^2+h'z-(uq+2ht)]=0,$$

en tenant compte de la syzygie

$$(17)\qquad nu'=u^2(s^2-q)-6uht-4h^2s.$$

Pour obtenir une autre équation entre v et z, il suffit de remplacer, dans l'identité

$$(\varepsilon+\zeta)^2-(\varepsilon-\zeta)^2-4\varepsilon\zeta=0,$$

les trois quantités $\varepsilon+\zeta$, $\varepsilon-\zeta$, $\varepsilon\zeta$ par leurs valeurs tirées de (10) (première et quatrième équations) et de (11). Il vient

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}&25v^6-(z^4-14hz^2-16nz+17h^2+6u^2s)v^4\\&\qquad-u^3(2tz^2+2ht-us^2)v^2-u^6t^2=0.\end{aligned}\right.$$

Il ne reste qu'à égaler à zéro le résultat des deux équations (16) et (18) par rapport à v^2 pour obtenir une équation qui ne renfermera plus que l'inconnue z.

Mais, auparavant, on peut simplifier l'équation (18) en en retranchant, membre à membre, l'équation (16) multipliée par v^2. Elle devient alors

$$25(hz^2+nz-h^2)v^4+u^3[-tz^2+h'z+(us^2-uq-4ht)]v^2-u^6t^2=0.$$

Ajoutons encore au premier membre de cette équation celui de (16) multiplié par h^2; elle deviendra

$$\begin{aligned}25z(hz+n)v^4-[&h^2z^4+(u^3t+11h^3)z^2+(9h^2n-u^3h')z\\&+6u^2h^2s+4u^3ht+u^4(q-s^2)-8h^4]v^2\\&-u^3[h^2tz^2+h^2h'z-h^2(uq+2ht)+u^3t^2]=0.\end{aligned}$$

Mais, si l'on tient compte des syzygies (12), (14), (17) et, en outre, de celle-ci :

$$(19)\qquad nh'=u^2st-uhq-6h^2t,$$

on vérifie sans peine que le premier membre de l'équation écrite ci-dessus est divisible par $hz+n$, en sorte qu'on peut l'écrire

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}(hz+n)\{25zv^4-[&hz^3-nz^2+(7h^2+u^2s)z+2hn-u^2u']v^2\\&-u^3(htz+hh'-nt)\}=0.\end{aligned}\right.$$

Le problème est ainsi ramené à tirer v et z des deux équations (16) et (20).

Une première solution se présente tout d'abord : en faisant $hz+n=0$,

Digitized by Google

l'équation (20) est satisfaite quel que soit v; il suffit donc de remplacer z par $-\frac{n}{h}$ dans l'équation (16), qui devient alors

$$(21)\qquad 25h^4v^4 - u^3(uh^2s^2 + u^2t^2 - 2u^2hst + 6h^2t)v^2 + u^6h^2t^2 = 0,$$

et qui fournit deux valeurs de v^2 en fonction des coefficients de l'équation (1).

Mais cette solution ne peut être considérée comme générale. En effet, v_1^2 étant une de ses racines, on doit avoir, en vertu de (9),

$$\begin{aligned}
\alpha &= v_1 - h,\\
\beta &= -(v_1 + h),\\
\delta &= \frac{n}{h}(v_1 - h =)\ \frac{n\alpha}{h},\\
\gamma &= -\frac{n}{h}(v_1 + h) = \frac{n\beta}{h},
\end{aligned}$$

d'où

$$(22)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de (4),

$$(23)\qquad jl^2m^2 + mj^2k^2 = kj^2l^2 + lk^2m^2.$$

Cette relation ne pourrait avoir lieu d'une manière générale que si elle se réduisait à une identité quand on y remplace j, k, l, m par leurs valeurs tirées de (7), savoir :

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}
j &= \frac{1}{5}\sum x_i\theta^{4i},\\
k &= \frac{1}{5}\sum x_i\theta^{3i},\\
l &= \frac{1}{5}\sum x_i\theta^{2i},\\
m &= \frac{1}{5}\sum x_i\theta^{i},
\end{aligned}\right.$$

Or elle se transforme dans ce cas en une relation entre les cinq racines de (1), à l'exclusion des coefficients de l'équation (1). Nous verrons plus loin que ce cas particulier rentre dans le cas général au point de vue de la solution du problème que nous étudions.

Prenons donc l'équation (20) débarrassée du facteur $hz + n$. Elle est du second degré en v^2, comme l'équation (16), et le résultant de ces deux équations, égalé à zéro, donnera l'équation en z que nous cherchons. On

Digitized by Google

sait qu'un tel résultant peut s'écrire sous la forme

$$(AC' - CA')^2 + (BC' - CB')(BA' - AB'),$$

dans laquelle nous avons ici à faire

$$\begin{aligned} A &= 25, \\ B &= -(z^4 + 11hz^2 + 9nz + 6u^2s - 8h^2), \\ C &= -u^3[tz^2 + h'z - (uq + 2ht)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A' &= 25z, \\ B' &= -[hz^3 - nz^2 + (7h^2 + u^2s)z + 2hn - u^2u'], \\ C' &= -u^3(htz + hh' - nt), \end{aligned}$$

On en déduit

$$(25)\quad \begin{cases} AC' - CA' = 25u^3[tz^3 + h'z^2 - (uq + 3ht)z + nt - hh'], \\ BC' - CB' = u^7(pz - q'), \\ BA' - AB' = -25[z^5 + 10hz^3 + 10nz^2 + 5(u^2s - 3h^2)z + u^2u' - 2hn], \end{cases}$$

en utilisant, outre les syzygies déjà rappelées plus haut, celles-ci :

$$(26)\quad \begin{cases} ur = 2hh' - 3nt, \\ u(h's - u't) = 2hr - nq, \\ h'u' = u(Jh + qs - s^3) - 6hst, \\ uq' = u'q - 2rs, \\ up = Jh + 2qs - s^3 + 9t^2, \end{cases}$$

qui sont également connues dans la théorie de la forme du cinquième ordre. Mais on a pour la forme type du covariant canonique T de la forme du cinquième ordre :

$$T = tx^3 + h'x^2y - (uq + 3ht)xy^2 + (nt - hh')y^3;$$

pour celle de son covariant linéaire le plus simple :

$$P = px - q'y,$$

et pour celle de la forme elle-même, comme il a été déjà dit :

$$U = u[x^5 + 10hx^3y^2 + 10nx^2y^3 + 5(u^2s - 3h^2)xy^4 + (u^2u' - 2hn)y^5].$$

L'équation en z, résultant de (16) et de (20), n'est donc autre que celle-ci :

$$(27)\qquad 25T^2 - UP = 0,$$

où U, P, T sont respectivement la forme elle-même, son covariant linéaire le plus simple, et son covariant canonique (du troisième ordre), dans

Digitized by Google

lesquels on a remplacé x par z et y par l'unité. C'est ce covariant

$$W = 25T^2 - UP, \tag{28}$$

que j'appelle le *covariant résolvant,* et que je me propose d'étudier plus loin au point de vue de la théorie des formes.

Voici donc quelle sera la marche à suivre pour résoudre par radicaux, quand cela est possible, l'équation du cinquième degré privée du second terme.

Former le covariant W et chercher s'il possède un facteur rationnel $Rx + Sy$. S'il en existe un, poser $z_1 = -\frac{S}{R}$.

Soient T_1, U_1, P_1 ce que deviennent respectivement T, U, P, quand on y fait $x = z_1$, $y = 1$. La racine commune aux deux équations (16) et (20) sera, comme on sait :

$$v_1^2 = -\frac{u^4 T_1}{U_1} = -\frac{u^4 P_1}{25 T_1},$$

d'où

$$v_1 = \pm u^2 \sqrt{-\frac{T_1}{U_1}} = \pm \frac{u^2}{5}\sqrt{-\frac{P_1}{T_1}}. \tag{29}$$

Calculer alors α, β, λ et μ par les formules suivantes, tirées de (9), (10) et (13) :

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= -h + v_1, \\ \beta &= -h - v_1, \\ \lambda &= \frac{1}{2}\left[2hn - u^2u' - 20v_1^2 z_1 + v_1(z_1^3 + 13hz_1 + n) + \frac{u^3(tz_1 + h')}{v_1}\right], \\ \mu &= \frac{1}{2}\left[2hn - u^2u' - 20v_1^2 z_1 - v_1(z_1^3 + 13hz_1 + n) - \frac{u^3(tz_1 + h')}{v_1}\right]. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Prendre pour j^5 et m^5 les deux racines de l'équation

$$X^2 - \lambda X + \alpha^5 = 0, \tag{7}$$

et pour k^5, l^5 les deux racines de l'équation

$$Y^2 - \mu Y + \beta^5 = 0, \tag{8}$$

en choisissant les signes de manière à satisfaire aux équations du groupe (4), complétées par (9), savoir

$$\left\{\begin{aligned} j^2 l + m^2 k &= -n - v_1 z_1, \\ k^2 j + l^2 m &= -n + v_1 z_1, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

et enfin calculer les cinq racines $x_0, x_1, \ldots, x_4$ par la formule (3).

Digitized by Google

Comme toutes les quantités intermédiaires employées dans les calculs ci-dessus ($h, n, u', t, h', \ldots$) sont des péninvariants de la forme binaire du cinquième ordre, rien n'empêche d'appliquer les formules et la marche qui viennent d'être indiquées à l'équation générale

$$aX^5 + 5bX^4 + 10cX^3 + 10dX^2 + 5eX + f = 0,$$

à condition de prendre pour z_1 l'expression $\frac{b}{a} + z'_1$, z'_1 étant la racine rationnelle du covariant W construit avec la forme complète (à moins qu'on ne préfère construire le covariant W avec les péninvariants comme si l'on avait préalablement fait disparaître le second terme de l'équation); et ensuite d'ajouter $-\frac{b}{a}$ à chacune des racines $x_0, x_1, \ldots, x_4$ pour obtenir les racines correspondantes $X_0, X_1, \ldots, X_4$ de l'équation générale. Les péninvariants et invariants à introduire dans les calculs s'obtiendront d'ailleurs aisément de proche en proche par les formules suivantes bien connues, dont j'ai déjà rappelé ci-dessus les cinq premières :

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{ll}
u & = a, \\
h & = ac - b^2, \\
n & = a^2 d - 3abc + 2b^3, \\
s & = ae - 4bd + 3c^2, \\
u' & = a^2 f - 5abe + 2acd + 8b^2 d - 6bc^2, \\
t & = ace + 2bcd - ad^2 - b^2 e - c^3 = \frac{1}{u^2}(u^2 hs - n^2 - 4h^3), \\
u^2 q & = u^2 s^2 - 6uht - 4h^2 s - nu', \\
u^2 \mathrm{J} & = u'^2 + 12ust + 4hs^2, \\
up & = \mathrm{J}h + 2qs - s^3 + 9t^2, \\
us' & = s^2 t - 3qt - hp, \\
u\mathrm{K} & = (\mathrm{J}s - 12s')t - p(q + s^2), \\
3u\mathrm{L} & = (p^2 + 4\mathrm{J}s' - \mathrm{K}s)t - 3pss', \\
uh' & = hu' - ns, \\
ur & = 2hh' - 3nt, \\
uq' & = u'q - 2rs.
\end{array}\right.$$

Cas où $w = 0$. — Un cas particulier intéressant est celui où le covariant W admet le facteur y, c'est-à-dire où le péninvariant $w = 25t^2 - up$ qui est sa source se trouve nul : c'est ce qui arrive par exemple pour l'équation de Vaudermonde, dans le calcul des racines 11ièmes de l'unité :

$$X^5 - X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 3X - 1 = 0.$$

Digitized by Google

Dans ce cas, l'équation (27) s'abaisse au cinquième degré; on peut prendre $z_1 = \infty$, d'où $\alpha = \beta$, et $v_1 = 0$. En introduisant ces hypothèses dans les équations (9), (10), (11), (13), on trouve successivement

$$\begin{aligned}
\alpha = \beta &= -h,\\
\varepsilon + \zeta &= 4hn - u^2 u',\\
(v_1 z_1)^2 &= n^2 + h(4h^2 - u^2 s) = -u^2 t,\\
v_1 z_1 &= u\sqrt{-ut},\\
\lambda + \mu &= 2hn - u^2 u',\\
\varepsilon\zeta &= 2h(2u^2 t + 2h^2 - u^2 hs),\\
\varepsilon - \zeta &= -\frac{u^2 h'}{\sqrt{-ut}},\\
\lambda - \mu &= \frac{u^2(uq - ht)}{\sqrt{-ut}}.
\end{aligned}$$

Les équations (7) et (8) deviennent alors

$$X^2 + \left(\frac{1}{2}u^2 u' - hn \pm \frac{u(uq - ht)\sqrt{-ut}}{2t}\right)X - h^5 = 0, \tag{33}$$

et le calcul s'achève sans difficulté.

Application à l'équation de MM. Bougaïeff et Lachtine. — La seule application que je veuille donner ici pour la méthode générale indiquée ci-dessus sera la résolution de l'équation que MM. Bougaïeff et Lachtine ont indiquée comme résoluble par radicaux (*Annales de la Soc. math. de Moscou,* 1890), savoir

$$(\lambda x)^5 + \frac{(\mu' - 1)(\mu' - 11)}{4(\mu'^2 + 4)}(\lambda x) + \frac{\mu' - 11}{2(\mu'^2 + 4)} = 0. \tag{34}$$

Posons

$$A = \mu' - 1, \qquad B = \mu' - 11, \qquad C = \mu'^2 + 4.$$

L'équation (34) devient

$$4C(\lambda x)^5 + AB(\lambda x) + 2B = 0.$$

Pour le calcul des péninvariants successifs, on peut prendre

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = 0, \qquad d = 0, \qquad e = \frac{AB}{20C}, \qquad f = \frac{B}{2C};$$

Digitized by Google

d'où

$$u = 1, \quad h = 0, \quad n = 0, \quad s = \frac{AB}{20C}, \quad t = 0, \quad u' = \frac{B}{2C};$$

$$q = \frac{A^2B^2}{2^4 5^2 C^2}, \quad J = \frac{B^2}{4C^2}, \quad h' = 0, \quad p = \frac{A^2B^3}{2^6 5^3 C^3},$$

$$s' = 0, \quad K = -\frac{A^5B^5}{2^9 5^5 C^5}, \quad L = 0, \quad r = 0, \quad q' = \frac{A^2B^3}{2^5 5^2 C^2},$$

$$U = x^5 + \frac{AB}{4C}x + \frac{B}{2C}, \quad P = \frac{A^2B^3}{2^6 5^3 C^3}(A\dot{x} - 10),$$

$$T = -\frac{A^2B^2}{2^4 5^2 C^2}x,$$

$$(35) \quad W = 25T^2 - UP = -\frac{A^2B^2}{2^6 5^2 C^4}\left\{ACx^6 - 10Cx^5 - A^2Bx^2 - 2ABx - 5B.\right\}$$

Mais pour $x = 1$, la parenthèse s'annule en vertu des valeurs de A, B, C en μ'. La résolvante $W = 0$ admet *toujours* la solution rationnelle 1. Prenons donc $z_1 = 1$; il vient

$$U_1 = \frac{1}{4C}(4C + AB + 2B) = \frac{5A^2}{4C},$$

$$P_1 = \frac{A^2B^4}{2^6 5^3 C^3},$$

$$T_1 = -\frac{A^2B^2}{2^4 5^2 C^2};$$

d'où

$$v_1 = \frac{B}{10\sqrt{5C}},$$

$$\alpha = \frac{B}{10\sqrt{5C}}, \quad \beta = -\frac{B}{10\sqrt{5C}},$$

$$\lambda = -\frac{B}{4C} - \frac{B^2}{50C} + \frac{B}{20\sqrt{5C}} = \frac{B}{100C}(-2A - 5 + \sqrt{5C}),$$

$$\mu = \frac{B}{100C}(-2A - 5 - \sqrt{5C}).$$

Le calcul est dès lors aisé à terminer, si l'on se donne les valeurs de μ'.

Prenons par exemple $\mu' = -1$, ce qui correspond à l'équation

$$(36) \qquad 5x^5 + 6x - 6 = 0.$$

Il vient alors

$$A = -2, \quad B = -12, \quad C = 5,$$

$$v_1 = -\frac{6}{25}, \quad \alpha = -\frac{6}{25}, \quad \beta = +\frac{6}{25},$$

$$\lambda = -\frac{12}{125}, \quad \mu = +\frac{18}{125}.$$

Digitized by Google

Les équations (7) et (8) deviennent

$$X^2 + \frac{12}{125}X - \frac{\bar{6}^5}{5^{10}} = 0,$$

$$Y^2 - \frac{18}{125}Y + \frac{\bar{6}^5}{5^{10}} = 0,$$

et, en tenant compte de (31), elles donnent

$$j^5 = \frac{2^2 3}{5^5}, \qquad m^5 = -\frac{2^2 3^4}{5^5},$$

$$k^5 = \frac{2 3^2}{5^5}, \qquad l^5 = \frac{2^4 3^3}{5^5};$$

d'où pour l'expression générale des racines de (36)

$$(37) \qquad x_i = \frac{1}{5}\left(\theta^i \sqrt[5]{24} + \theta^{2i} \sqrt[5]{18} + \theta^{3i} \sqrt[5]{432} - \theta^{4i} \sqrt[5]{324}\right).$$

Ce résultat ne diffère que par la forme de celui qu'ont obtenu MM. Bougaïeff et Lachtine.

Expression des racines du covariant W *en fonction de celles de la forme du cinquième ordre.* — D'après les calculs qui ont conduit à prendre W comme résolvante, une racine z de ce covariant a pour expression

$$(38) \qquad z = \frac{\delta - \gamma}{\alpha - \beta} = \frac{k^2 j + l^2 m - j^2 l - m^2 k}{jm - kl}.$$

En remplaçant j, k, l, m, par leurs valeurs tirées de (24), on trouve sans peine l'expression suivante de z

$$(39) \quad z = \frac{1}{5}\,\frac{4\Sigma x_i x_{i+1} x_{i+2} - 4\Sigma x_i x_{i+2} x_{i+4} - \Sigma x_i x_{i+1}^2 + \Sigma x_i x_{i+2}^2 + \Sigma x_i x_{i+3}^2 - \Sigma x_i x_{i+4}^2}{\Sigma x_i x_{i+1} - \Sigma x_i x_{i+2}},$$

expression dans laquelle le signe Σ s'applique aux cinq valeurs de i, et qui n'a elle-même que six valeurs quand on permute les racines entre elles de toutes les manières possibles.

Dans le cas particulier envisagé plus haut, où $\alpha\delta = \beta\gamma$, cette relation donne, en vertu des équations (5),

$$\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\delta + \gamma}{\beta + \alpha} = \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} = \frac{n}{h},$$

et, par conséquent, la valeur particulière de z, que nous avions trouvée

Digitized by Google

égale à $-\frac{n}{h}$ dans ce cas, est égale à

$$\frac{\delta-\gamma}{\alpha-\beta},$$

c'est-à-dire à sa valeur dans le cas général. Le cas particulier où $\alpha\delta=\beta\gamma$ ne se distingue donc en rien du cas général, et l'on obtiendra toujours la solution en considérant le covariant W tel qu'il a été défini.

Les racines de U étant écrites dans l'ordre

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,$$

on obtiendra les vingt permutations qui laissent z invariable en écrivant les mêmes racines de 2 en 2, de 3 en 3, ou de 4 en 4, puis en prenant une quelconque des racines pour lettre initiale. On en conclut sans peine que les six valeurs différentes de z peuvent être regardées comme correspondant aux six permutations du Tableau ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc}
x_0, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\
x_0, & x_1, & x_2, & x_4, & x_3, \\
x_0, & x_1, & x_3, & x_2, & x_4, \\
x_0, & x_1, & x_3, & x_4, & x_2, \\
x_0, & x_1, & x_4, & x_2, & x_3, \\
x_0, & x_1, & x_4, & x_3, & x_2,
\end{array}$$

obtenu en laissant les rangs de x_0 et de x_1 invariables.

Il en résulte immédiatement que, si U a une racine double, par exemple $x_4=x_3$, les six valeurs de z deviennent égales deux à deux, et W doit devenir un carré parfait. Si U admet une racine triple, par exemple $x_2=x_3=x_4$, les six valeurs de z coïncident, en sorte que W doit devenir une sixième puissance exacte. Enfin, si U a deux racines doubles distinctes, W doit admettre un facteur double et un facteur quadruple. Je montrerai, dans la seconde Partie de ce Travail, comment on peut vérifier qu'il en est bien ainsi.

Mais, auparavant, il me reste à expliquer la différence qui existe entre l'expression de z trouvée ci-dessus (formule 39) en fonction des racines de U, et celle qu'a donnée M. Macclintock dans son Mémoire de 1898, et qui s'écrit ainsi, avec les notations que j'ai employées :

$$z=\frac{\Sigma x_i x_{i+1}\overline{x_{i+2}}-\Sigma x_i x_{i+2} x_{i+4}}{\Sigma x_i x_{i+1}-\Sigma_i x_{i+2}}. \tag{40}$$

Digitized by Google

Soient cinq quantités quelconques x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, et posons

$$\Sigma x_i x_{i+1} x_{i+2} - \Sigma x_i x_{i+2} x_{i+4} = \pi,$$
$$\Sigma x_i (x_{i+1}^2 + x_{i+4}^2) - \Sigma x_i (x_{i+2}^2 + x_{i+3}^2) = \rho,$$
$$\Sigma x_i x_{i+1} - \Sigma x_i x_{i+2} = \sigma.$$

On vérifie aisément l'identité suivante :

$$\pi + \rho = \sigma \Sigma x_i.$$

La valeur de z fournie par (39) étant

$$z = \frac{4\pi - \rho}{5\sigma}$$

peut donc encore s'écrire

$$z = \frac{\pi}{\sigma} - \frac{1}{5} \Sigma x_i.$$

Et lorsque Σx_i est nul, comme nous l'avons supposé, elle coïncide avec celle qui fournit la formule (40), savoir :

$$z = \frac{\pi}{\sigma}.$$

Mais, si l'on revient à la forme générale non privée du second terme, les deux expressions ne coïncident plus. On peut, d'ailleurs, remarquer que si X_0, X_1, ..., X_4 sont les racines de l'équation complète, x_0, x_1, ..., x_4 celles de l'équation privée du second terme, les deux séries de quantités sont liées par les relations

$$x_i = X_i + \frac{b}{a},$$

et que les formules (24) restent encore vraies quand on y remplace les x_i par les X_i. Donc l'expression de la racine z du covariant W est la même en fonction des racines X_i de la forme générale qu'en fonction de celles x_i de la forme privée de second terme : ce qui devait être, d'ailleurs, puisque W est un covariant de la forme.

II.

Le covariant résolvant W est une forme du sixième ordre par rapport aux variables et du sixième degré par rapport aux coefficients de la forme quintique U. Ses quatre invariants indépendants A, B, C, D doivent être des fonctions rationnelles des trois invariants J, K, L de U; il existe donc

Digitized by Google

entre A, B, C, D une relation qui caractérise W parmi les formes du sixième ordre, et qu'il est intéressant de rechercher.

Calculons d'abord les quatre invariants de W, au moyen de la méthode que j'ai indiquée en 1883 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*), et appliquée depuis à diverses reprises, notamment pour l'étude du sous-discriminant (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1895).

A cet effet, écrivons W sous sa forme type, savoir

$$(41)\qquad W = w_0 x^6 + 6 w_1 x^5 y + 15 w_2 x^4 y^2 + \ldots + 6 w_5 x y^5 + w_6 y^6,$$

où les coefficients s'xpriment comme suit en fonction des péninvariants de U :

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}
w_0 &= 25 t^2 - up,\\
w_1 &= \frac{25}{3} h' t + \frac{1}{6} u q',\\
w_2 &= -25 h t^2 + u\left(hp - \frac{5}{3} s^2 t - \frac{10}{3} q t\right),\\
w_3 &= -\frac{25}{2} n t^2 + \frac{1}{2} u (3 h q' - 10 r t - 5 h' q) + \frac{1}{2} u^2 u'',\\
w_4 &= 25 h^2 t^2 + \frac{1}{3} u h t (7 s^2 + 29 q) + \frac{1}{3} u^2 (19 h s' + 2 q s^2 + 7 s t^2) + \frac{1}{3} u^3 (2 p s - 3 J t),\\
w_5 &= \frac{25}{3} h^2 h' t + u\left(\frac{25}{3} h r t + \frac{13}{6} h n p + \frac{25}{18} n s' t\right)\\
&\qquad + u^2\left(\frac{25}{6} q r - \frac{25}{18} n s' + \frac{5}{3} h u''\right) + u^3\left(\frac{5}{6} q' s - \frac{1}{6} u' p\right),\\
w_6 &= -25 h^3 t^2 + u h^2 t (4 s^2 - 37 q) + u^2 h (2 q s^2 - 43 s t^2 - 33 h s')\\
&\qquad + u^3 t (2 J h - 25 t^2) + u^4 (J q + 6 s s').
\end{aligned}\right.$$

Calcul de A. — L'invariant A a pour valeur

$$(43)\qquad w_0 w_6 - 6 w_1 w_5 + 15 w_2 w_4 - 10 w_3^2,$$

et, comme il est du second degré par rapport aux coefficients de W, il doit être du douzième par rapport à ceux de U; l'expression ci-dessus, quand on y aura remplacé $w_0, w_1, \ldots, w_6$ par leur valeur, devra donc devenir divisible par u^6, et le quotient se réduira à une fonction de J, K, L.

Pour le calcul, il est permis de supposer nul *l'un* quelconque des péninvariants, par exemple t.

Les coefficients de w deviennent alors, en tenant compte des syzygies

Digitized by Google

relatives au cinquième ordre,

$$w_0 = -up,$$

$$w_1 = \frac{1}{6} uq'.$$

$$w_2 = -u^2 s',$$

$$w_3 = \frac{u}{2}(hq' - np - 5h'q),$$

$$w_4 = \frac{u^2}{3}(19hs' + 2qs^2 + 2ups),$$

$$w_5 = \frac{u}{6}[50hh'q - 15h'q' - 2uns' - u^2(u'p - 5q's)],$$

$$w_6 = u^2[-h(2qs^2 + 17hs') + u^2(Jq + 2ss')].$$

En introduisant ces valeurs, on trouve, toutes réductions faites,

$$(44) \qquad A = \frac{5}{6}(JK - 16L).$$

Pour le calcul des invariants B et C, qui sont respectivement des degrés 4 et 6 par rapport aux coefficients de W, et, par conséquent, des degrés 24 et 36 par rapport à ceux de U, je commencerai par calculer le covariant *h' biquadratique* le plus simple [Q] de W, celui dont la source a pour expression

$$(45) \qquad w_0 w_4 - 4 w_1 w_3 + 3 w_2^2.$$

Je calculerai ensuite les invariants quadratique et cubique de [Q], lesquels ont pour valeur, comme on sait, respectivement

$$(46) \qquad \Sigma = \frac{1}{12}(A^2 - 36B) \quad \text{et} \quad \Theta = \frac{1}{216}(54C + 108AB - A^3);$$

A étant déjà connu, l'expression du premier permettra d'obtenir B, et celle du second, C.

Calcul de [Q]. — Pour le calcul des covariants, il n'est plus permis, en général, de supposer nul un péninvariant quelconque. Mais [Q] n'étant que du quatrième ordre, le hessien H de U, qui est du sixième ordre, ne peut entrer dans son expression; h disparaîtrait donc de lui-même du résultat. Rien n'empêche, par conséquent, de le supposer nul, pour simplifier le calcul.

Digitized by Google

Dans cette hypothèse, il vient

$$w_0 = 25t^2 - up,$$
$$w_1 = \frac{25}{3}h't + \frac{1}{6}uq',$$
$$w_2 = -\frac{5ut}{3}(2q + s^2),$$
$$w_3 = -\frac{25}{2}nt^2 - \frac{5}{2}u(2rt + h'q) + \frac{1}{2}u^2u'',$$
$$w_4 = \frac{1}{3}u^2s(2qs + 7t^2) + \frac{1}{3}u^3(2ps - 3Jt).$$

Substituant ces valeurs dans l'expression (45), on trouve en divisant par u^4, toutes réductions faites,

$$[Q] = \frac{1}{3}(2KS^2 - JSS' + 16S'^2), \tag{47}$$

ce qu'on peut écrire

$$[Q] = \frac{1}{192}[32S' - (J + \sqrt{\Delta})S][32S' - (J - \sqrt{\Delta})S], \tag{48}$$

en appelant Δ le discriminant $J^2 - 128K$ de la forme primitive U.

Le covariant biquadratique [Q] étant décomposable en deux covariants quadratiques, ses invariants Σ et Θ s'expriment, comme on sait, en fonction des discriminants δ, δ' et de l'invariant commun i de ces deux covariants quadratiques par les formules suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \overline{192}^2\,\Sigma &= \frac{1}{12}(i^2 + 12\delta\delta'), \\ \overline{192}^3\,\Theta &= \frac{1}{216}i(36\delta\delta' - i^2). \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Calcul de B *et* C. — En vertu des relations (46), il vient alors

$$\left\{\begin{aligned} A^2 - 36B &= \frac{1}{\overline{192}^2}(i^2 + 12\delta\delta'), \\ 54C + 108AB - A^3 &= \frac{1}{\overline{192}^3}i(36\delta\delta' - i^2). \end{aligned}\right. \tag{50}$$

Le calcul de i, δ, δ' se fait aisément en prenant les deux covariants sous leur forme type, savoir

$$\left\{\begin{aligned} &[32s' - (J \pm \sqrt{\Delta})s]x^2 - 2\left[16(u'' + st') + \frac{J \pm \sqrt{\Delta}}{2}u'\right]xy \\ &\quad + [32(uJt - ups - hs') + (J \pm \sqrt{\Delta})(hs + 3ut)]\delta y^2, \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Digitized by Google

et supposant pour plus de simplicité $s = 0$, comme il est permis de le faire pour le calcul d'invariants. On trouve

$$(52)\quad \begin{cases} \delta = -\frac{1}{2}[J^2 - 32JK - 1536L + (J^2 + 32K)\sqrt{\Delta}], \\ \delta' = -\frac{1}{2}[J^2 - 32JK - 1536L - (J^2 + 32K)\sqrt{\Delta}], \\ i = 96(16L - JK). \end{cases}$$

d'où

$$(53)\quad \delta\delta' = 2^8[9(16L - JK)^2 - (K^2 + 3JL)\Delta].$$

La troisième des formules (52) équivaut à

$$(54)\quad i = -\frac{576}{5}A.$$

On peut dès lors éliminer i et $\delta\delta'$ entre (54) et les deux relations (50), et obtenir, comme relation caractéristique entre les invariants A, B, C de W, l'identité suivante :

$$(55)\quad 3375C + 2700AB - 4A^3 = 0.$$

Je reviendrai plus loin sur les conséquences de cette relation caractéristique.

Les formules (50), (53), (54) donnent d'ailleurs pour les expressions complètes de B et de C

$$(56)\quad \begin{cases} B = \dfrac{(K^2 + 3JL)\Delta}{2^4.3^3} - \dfrac{11(JK - 16L)^2}{2^4.3^4}, \\ C = \dfrac{37(JK - 16L)^3}{2^3.3^6} - \dfrac{(JK - 16L)(K^2 + 3JL)\Delta}{2^3.3^4}. \end{cases}$$

Calcul du discriminant D *de* W. — Quant au discriminant D de W, on l'obtient par la méthode que j'ai indiquée, savoir en annulant les deux premiers coefficients de W, élevant le second au carré pour faire disparaître les péninvariants gauches, et éliminant tous les péninvariants droits au moyen des syzygies connues. Voici du reste la marche du calcul. Soit posé

$$w_0 = 25t^2 - up = 0,$$
$$6w_1 = 50h'p + uq' = 0,$$

c'est-à-dire, en élevant au carré,

$$2500t^2h'^2 + u^2q'^2 + 100uth'q' = 0.$$

Digitized by Google

Si l'on remplace h'^2, q'^2, $h'q'$ par leurs valeurs en fonction des pénin-variants droits, la seconde équation devient, en tenant compte de la première

$$75hp^2 + 200pqt - 100ps^2t + u(\mathrm{J}ps + 63ps' - \mathrm{J}^2t + 103\mathrm{K}t) = 0.$$

Mais si l'on ajoute au premier membre la quantité identiquement nulle

$$25t(u\mathrm{K} - \mathrm{J}st + 12s't + pq + ps^2) - 75p(us' - s^2t + 3qt + hp),$$

il se réduit à

$$t(128\mathrm{K} - \mathrm{J}^2).$$

Le covariant W n'admet donc un facteur double que dans les deux cas suivants :

1° Si $\mathrm{D} = \mathrm{J}^2 - 128\mathrm{K}$ est nul, c'est-à-dire si la forme U admet elle-même un facteur double.

2° Si $t = 0$ en même temps que $w_0 = 0$, ce qui exige que UP ait ce facteur commun avec $\mathrm{W} = 25\mathrm{T}^2 - \mathrm{UP}$; mais alors ce facteur étant double dans W et dans T^2 est double aussi dans UP; et si l'on suppose que Δ ne soit pas nul, il faut qu'il soit commun à U et à P, ce qui exige que les résultants de T et de P, aussi bien que de U et de P, soient nuls. Le premier de ces résultants est l'invariant gauche I de M. Hermite; le second est, comme on sait, $\mathrm{I}(\mathrm{J}^2 - 3\mathrm{K})$; pour qu'ils soient nuls simultanément, il faut que I soit nul.

Donc enfin le discriminant de W se réduit, à un coefficient numérique près, au produit d'une certaine puissance de Δ par une certaine puissance de I; et comme il doit être de degré 60 par rapport aux coefficients de U, alors que Δ et I sont respectivement de degré 8 et 18, on a nécessairement

$$(56)' \qquad \mathrm{D} = \alpha \mathrm{I}^2 \Delta^3,$$

α étant un coefficient numérique.

Il y a enfin l'invariant gauche E de la forme du sixième ordre, du quinzième degré par rapport aux coefficients de W, par conséquent du quatre-vingt-dixième par rapport à ceux de U. 90 n'étant pas multiple de 4, l'expression de E admet nécessairement en facteur une puissance impaire de l'invariant gauche I. Je dis qu'elle admet en outre le facteur Δ^2. En effet, lorsqu'on veut calculer l'expression de E^2 en fonction de A, B, C, D, on trouve (Salmon, *Lessons intr. to the modern higher Algebra*, 3e édition, p. 237) que la partie indépendante de D est le produit de

$$3375\mathrm{C} + 2500\mathrm{AB} - 4\mathrm{A}^3$$

Digitized by Google

par le carré d'un certain résultant. Mais ce facteur ici est nul [form. (55)]; E^2 admet donc D en facteur, c'est-à-dire $I^2\Delta^2$, et, par conséquent, E est divisible par $I\Delta^2$, le quotient étant un invariant composé de degré 56, que je n'ai pas cherché à calculer.

Expression de W *quand* U *a un facteur carré.* — D'après les formules (44) et (56), on voit que si U a un facteur carré, ce qui entraîne $\Delta = 0$, les invariants A, B, C se réduisent à des puissances de $JK - 16L$, multipliées par des facteurs numériques; en éliminant cette quantité, on trouve qu'ils satisfont aux deux relations suivantes :

$$(57) \qquad \begin{cases} 11A^2 + 900B = 0, \\ 37A^2 - 2275C = 0, \end{cases}$$

qui caractérisent précisément, lorsque le discriminant D est d'ailleurs nul, les formes du sixième degré qui ont trois facteurs carrés, c'est-à-dire qui se réduisent à un carré parfait. Nous avons donc ici la démonstration directe du fait annoncé plus haut, savoir que, lorsque U admet un facteur double, son covariant résolvant W se réduit à un carré parfait.

Décomposition de U *quand il existe un facteur double.* — Cette propriété de W permet d'obtenir immédiatement la racine double de U. Soit, en effet, Θ le polynome dont W est le carré. On a

$$25T^2 - UP = \Theta^2.$$

D'où

$$(58) \qquad UP = (5T + \Theta)(5T - \Theta).$$

L'une des formes cubiques $5T \pm \Theta$ est donc divisible par P; le quotient de cette division et l'autre forme cubique constituent les deux facteurs de U, le premier quadratique, le second cubique. D'ailleurs, ils ne peuvent avoir de facteur linéaire commun, sans quoi ce facteur diviserait à la fois U et T, et l'invariant I serait nul, supposition que nous pouvons écarter; donc le facteur double de U doit diviser l'une de ces deux formes, et il est naturel d'admettre que c'est la forme quadratique (je l'ai d'ailleurs vérifié sur des exemples numériques). Donc enfin, étant donnée une forme quintique U à facteur double, si l'on forme ses covariants P, T et $W = 25T^2 - UP$, W est un carré parfait Θ^2; l'une des deux formes $5T \pm \Theta$ est divisible par P, et le quotient est un carré parfait; en extrayant la racine, on obtient le facteur linéaire correspondant à la racine double

Digitized by Google

de U. Ce facteur n'est donc autre que le covariant, irrationnel en général,

$$\sqrt{\frac{\pm 5T \pm \sqrt{25T^2 - UP}}{P}},$$

mais qui devient rationnel (les extractions de racines se faisant exactement à condition de prendre les signes convenables) lorsque $\Delta = 0$.

Cas où U *possède deux facteurs doubles.* — Lorsque la forme U possède deux facteurs doubles, on sait que les invariants satisfont aux deux conditions

$$\Delta = 0,$$
$$JK - 16L = 0.$$

Donc alors A, B, C, D s'évanouissent tous à la fois, ce qui signifie que W admet un facteur au moins quadruple, comme il avait été prévu. De même, si U admet un facteur triple, les covariants J, K, L s'annulent, et il en est de même de A, B, C, D : d'où la même conclusion.

Hessien de W. — J'ai calculé le covariant hessien de W en formant l'expression

$$w_0 w_2 - w_1^2,$$

simplifiant au moyen des syzygies et divisant finalement par u^2. Il vient, tous calculs faits :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{36}[U\Delta T + (JS - 32S')W]. \tag{59}$$

Lorsque $\Delta = 0$, ce covariant devient divisible par W, comme on pouvait le prévoir, puisque W admet alors trois facteurs carrés, qui doivent aussi être des facteurs carrés de son hessien d'après la propriété connue des covariants hessiens : donc W doit diviser son hessien. Ce résultat confirme donc ceux obtenus précédemment.

Résultant de W *et du covariant* S. — Puisqu'il suffit de connaître une racine de W pour obtenir l'expression par radicaux des cinq racines de U, il est clair que U sera résoluble par radicaux toutes les fois que ses trois invariants J, K, L seront tels que le résultant de W et d'un autre covariant quelconque de U soit nul. Il y a donc quelque intérêt à former quelques-uns de ces résultants.

Calculons par exemple celui de W et du covariant quadratique le plus simple S de U (covariant du second degré par rapport aux coefficients

Digitized by Google

de U). Il suffit pour cela de poser

$$(60)\qquad \begin{cases} s = 0, \\ 25\,t^2 = up, \end{cases}$$

d'écrire les cinq syzygies qui relient les trois invariants et les sept péninvariants droits u, t, h, s, s', q, p, et d'éliminer six de ces derniers : le septième restera, en vertu de l'homogénéité, comme facteur d'une certaine fonction de J, K, L, laquelle sera le résultant demandé.

Les cinq syzygies sont :

$$(61)\qquad \begin{cases} up - \mathrm{J}h - 2qs + s^3 - 9t^2 = 0, \\ us' - s^2t + 3qt + hp = 0, \\ u\mathrm{K} - \mathrm{J}st + 12s't + pq + ps^2 = 0, \\ 3u\mathrm{L} - p^2t - 4\mathrm{J}s't + \mathrm{K}st + 3pss' = 0, \\ ups - u\mathrm{J}t - q^2 + 3st^2 + 4hs' = 0, \end{cases}$$

et le calcul indiqué donne comme résultat

$$(62)\qquad \mathrm{J}^2(4\mathrm{JK} + 11\mathrm{L}) + 1024\mathrm{L}^2 + 64\mathrm{JKL} + 17\mathrm{J}^2\mathrm{K}^2.$$

Les formes quintiques pour lesquelles cet invariant composé est nul sont donc résolubles par radicaux : il suffit de prendre pour z_1, dans les calculs de la première partie de ce travail, la racine commune aux deux covariants S et $25\mathrm{T}^2 - \mathrm{UP}$.

On pourra calculer ainsi autant de conditions invariantes qu'on voudra, suffisantes pour caractériser une forme quintique résoluble par radicaux : de même qu'en calculant les résultants de U et de ses divers covariants on obtiendrait des relations invariantes caractérisant chacune une forme quintique qui admette un facteur rationnel.

Conditions de résolubilité par les fonctions elliptiques. — Lorsque W n'admet pas de racines rationnelles, on peut se proposer d'exprimer ses racines au moyen des fonctions elliptiques. Toutes les équations algébriques qui ont été demandées dans ce but à la théorie des fonctions elliptiques dépendent de deux paramètres seulement, qui correspondent aux deux invariants de la fonction elliptique; aussi ces équations, considérées au point de vue de la théorie des formes, sont-elles caractérisées, si elles sont du cinquième ordre, par *une* relation invariante, et, si elles sont du sixième ordre, par *deux* relations invariantes; ce qui s'oppose à ce qu'elles soient appliquées à la résolution de l'équation générale du cinquième ordre, sans l'emploi préalable d'une transformation *non*

Digitized by Google

linéaire. Toutefois, de même que la méthode de résolution de M. Hermite est directement applicable, par une simple transformation linéaire, à l'équation du cinquième ordre dont le premier membre est une forme ayant son invariant L égal à zéro, et celle de M. Brioschi, dans les mêmes conditions, à l'équation du cinquième ordre dont le premier membre a ses trois invariants liés par la relation

$$2L = \sqrt{\Delta}(J^2 - 4J\sqrt{\Delta} + 9\Delta),$$

de même on peut se demander quelles relations invariantes doivent être satisfaites, pour que l'équation $W = 0$ soit directement transformable par substitution linéaire en une des équations du sixième ordre que fournit la théorie des fonctions elliptiques, de telle sorte qu'une de ses racines étant obtenue par cette théorie, la résolution de U devienne possible par radicaux, après adjonction d'une transcendante elliptique.

Les développements donnés plus haut permettent de répondre à cette question. La théorie des fonctions elliptiques fournit en effet plusieurs équations du sixième ordre dont le premier membre satisfait à la même condition invariante que W, savoir

$$(55) \qquad 3375C + 2700AB - 4A^3 = 0;$$

chacune d'elles est caractérisée en outre par une seconde relation invariante, dans laquelle il suffit de reporter les expressions données ci-dessus pour A, B, C en fonction de J, K, L, pour avoir la condition invariante à laquelle doit satisfaire la forme quadratique U pour que ce mode mixte de résolution lui soit applicable. Voici à quels résultats on arrive dans cet ordre d'idées :

1° L'équation modulaire relative à la transformation du cinquième ordre est la suivante :

$$(63) \qquad z^6 + 5z^4 + 15z^2 - 4z\mu - 5 = 0,$$

et elle est caractérisée par les deux conditions invariantes $A = 0$, $C = 0$: la relation (55) est donc satisfaite, et il suffit, d'après (44) et (56), que l'on ait $JK - 16L = 0$ pour que W puisse être ramené par une substitution linéaire à la forme (63) (*voir* pour les détails du calcul la *Théorie des formes binaires algébriques* de Clebsch, § 114). Donc toute forme U du cinquième ordre qui satisfait à la condition invariante

$$(64) \qquad JK - 16L = 0$$

est résoluble par radicaux, portant sur une transcendante fournie par la théorie des fonctions elliptiques.

Digitized by Google

2° Au lieu de l'équation modulaire on peut prendre l'équation au multiplicateur dans la transformation du cinquième ordre, savoir

$$z^6 - 4z^5 + 256k^2k'^2(z+1) = 0 \,. \tag{65}$$

dont les relations caractéristiques invariantes sont

$$\left\{\begin{array}{l} A^2 - 225\ B = 0, \\ 8A^3 + 3375\,C = 0. \end{array}\right. \tag{66}$$

La relation (55) se trouve encore satisfaite, et l'une ou l'autre des relations (66) équivaut à

$$\Delta(K^2 + 3JL) = 5(JK - 16L)^2. \tag{67}$$

Les formes U du cinquième ordre qui satisfont à cette condition (67) sont donc résolubles par le procédé dont il s'agit (*voir* pour le détail des calculs le même Ouvrage de Clebsch, § 115) (¹).

3° Prenons enfin l'équation de la division des périodes par 5, telle que la donne Halphen dans sa *Théorie des fonctions elliptiques*, t. III, p. 3 :

$$x^6 - 5g_2x^4 - 40g_3x^3 - 5g_2^2x^2 - 8g_2g_3x - 5g_2^3 = 0. \tag{68}$$

Les caractéristiques invariantes de la forme du sixième ordre qui constitue le premier membre de cette équation sont

$$\left\{\begin{array}{l} 4A^2 - 225\,B = 0, \\ 44A^3 + 3375\,C = 0. \end{array}\right. \tag{69}$$

Elle satisfait donc bien encore à la relation générale (55); et la forme W pourra y être ramenée par substitution linéaire, si l'on a en plus

$$4A^2 - 225\,B = 0,$$

ce qui, d'après les formules (44) et (56), correspond pour U à la condition invariante :

$$\Delta(K^2 + 3JL) = 9(JK - 16L)^2. \tag{70}$$

La substitution propre à mettre sous la forme (68) le premier membre W d'une équation du sixième ordre qui satisfait aux conditions (70) est d'ailleurs facile à trouver, car il suffit de prendre pour l'y de la transformée le facteur double du covariant (Q) [covariant biquadra-

(¹) Les notations employées par Clebsch pour les invariants A, B, C de la forme sextique sont un peu différentes de celles que j'ai adoptées ici, et qui sont conformes aux indications du *Traité d'Algèbre supérieure de Salmon*.

Digitized by Google

dratique le plus simple, formules (47) et (48)] dont le discriminant

$$(A^2 - 36B)^3 - (A^3 - 108AB - 54C)^2$$

s'évanouit en vertu de (70) [1], et de substituer ensuite à x la variable $\alpha x + \beta y$ qui fait disparaître le second terme de W ainsi préalablement transformé : les coefficients obtenus donneront les valeurs de g_2 et de g_3, invariants de la fonction elliptique à introduire, et si 2ϖ est l'une de ses périodes, on pourra prendre pour une des racines de (68) l'expression

$$x = p\frac{2\varpi}{5} + p\frac{4\varpi}{5}, \tag{71}$$

ce qui donnera une valeur de z annulant le covariant W, et conduira à la résolution de U par radicaux portant sur l'expression (71).

---

[1] La formule (53) montre que, si les conditions (69) sont remplies, le produit $\delta\delta'$ des discriminants des deux covariants quadratiques irrationnels $32S' - (J \pm \sqrt{\Delta})S$, dont le produit constitue (Q), s'annule : donc un de ces deux covariants irrationnels se réduit à un carré parfait et fournit le facteur à prendre pour l'y de la transformation.

Digitized by Google

Digitized by Google

THE KNOWN SYSTEMS OF SIMPLE GROUPS

AND THEIR INTER-ISOMORPHISMS;

By L.-E. DICKSON (Chicago).

The widespread interest taken in the group-theory seems to be due to its ready application to many problems in geometry, function-theory and number-theory, as well as in the theory of algebraic and differential equations. When a problem has been exhibited in group phraseology, the possibility of a solution of a certain character or the exact nature of its inherent difficulties is determined by a study of the group of the problem. For example, the question of the solution of an algebraic equation by radicals or of the integration of a differential equation by quadratures is answered by a knowledge of the group of the equation. Ultimately it is a question of the structure of the group, as determined by the chain of simple groups arising from its decomposition. As the chemist analyzes a compound to determine the ultimate elements composing it, so the group-theorist decomposes the group of a given problem into a chain of simple groups. While the chemist is concerned with about seventy elements and their various compounds, the mathematician has to study a universe formed from an infinite number of elements, the simple groups.

Much labor has been expended in the determination of simple groups. For continuous groups of a finite number of parameters, the problem has been completely solved by Killing and Cartan, with the result that all such simple groups, aside from five isolated ones, belong to the systems investigated by Sophus Lie, viz., the general projective group, the projective group of a linear complex, and the projective group leaving invariant a non-degenerate surface of the second order. The corresponding problem for infinite continuous groups remains to be solved.

With regard to finite simple groups, the problem has been attacked in two directions. Hölder, Cole, Burnside, Ling and Miller have shown that the only simple groups of composite orders less than 2000 are the

Digitized by Google

previously known simple groups of orders 60, 168, 360, 504, 660, 1092. On the other hand, various infinite systems of finite simple groups have been determined. The cyclic groups of prime orders and the alternating group on n letters ($n > 4$) have long been recognized as simple groups. The other known systems of finite simple groups have been discovered in the study of linear groups. Four systems were found by Jordan ([1]) in his study of the general linear, the abelian, and the two hypoabelian groups, the field of reference being the set of residues of integers with respect to a prime modulus p. Generalizations may be made by employing the Galois field ([2]) of order p^n (designated GF[p^n]), composed of the p^n Galois complexes formed with a root of a congruence of degree n irreducible modulo p. Groups of linear substitutions in a Galois field were studied by Betti, Mathieu and Jordan; but the structure of such groups has been determined only in the past decade. The simplicity of the group of unary linear fractional substitutions in a Galois field was first proved by Moore ([3]) and shortly afterwards by Burnside ([4]). The complete generalization of Jordan's four systems of simple groups and the determination of three new triply-infinite systems have been made by the writer.

Aside from the cyclic and alternating groups, the known systems of finite simple groups have been derived as quotient-groups in the series of composition of the following linear groups:

1. The group of all linear homogeneous substitutions ([5])

$$\xi'_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\xi_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

on m indices with coefficients in the GF[p^n]. The quotient-group may be exhibited concretely as the group of linear fractional substitutions of determinant unity on $m - 1$ indices.

2. The abelian linear group ([6]) of all linear homogeneous substitutions

---

([1]) *Traité des substitutions.*

([2]) Galois, *Œuvres mathématiques*, Paris, 1897. — Moore, *Congress Mathematical Papers*, p. 208-242.

([3]) *Bulletin Amer. Math. Soc.*, Dec. 1893; in full in the *Congress Math. Papers.*

([4]) *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. XXV, Feb. 1894.

([5]) Jordan, *Traité*, nos 119, 169. — Dickson, *Annals of Mathematics*, p. 161-183, 1897; University of Chicago *Record*, Aug., 1896.

([6]) *Quarterly Journal of Math.*, p. 169-178, 1897; p. 383-384, 1899.

Digitized by Google

in the GF$[p^n]$ on $2m$ indices ξ_i, η_i $(i = 1, \ldots, m)$ which leave invariant the bilinear function

$$\sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} \xi_{i1} & \eta_{i1} \\ \xi_{i2} & \eta_{i2} \end{vmatrix}.$$

3. The first and second hypoabelian groups ([1]), both subgroups of the abelian group. They may be defined as the largest linear homogeneous groups in the GF$[2^n]$ on $2m$ indices which leave invariant the respective quadratic forms

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \eta_i, \qquad \sum_{i=1}^{m} \xi_i \eta_i + \lambda \xi_1^2 + \lambda \eta_1^2,$$

where λ is a mark such that $\xi_1 \eta_1 + \lambda \xi_1^2 + \lambda \eta_1^2$ is irreducible in the field.

4. The first orthogonal group ([2]), composed of all linear homogeneous substitutions on m indices with coefficients in the GF$[p^n]$, $p > 2$, which leave invariant $\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2$.

5. The second orthogonal group ([3]), composed of all linear homogeneous substitutions on $2m$ indices with coefficients in the GF$[p^n]$, $p > 2$, which leave invariant the quadratic form

$$\sum_{i=1}^{2m-1} \xi_i^2 + \nu \xi_{2m}^2 \qquad (\nu = \text{not-square}).$$

6. The hyperorthogonal group ([4]), composed of all linear homogeneous substitutions on m indices in the GF$[p^{2n}]$ which leave invariant the function

$$\xi_1^{p^n+1} + \xi_2^{p^n+1} + \ldots + \xi_m^{p^n+1}.$$

Denoting by $\bar{\xi}$ the conjugate ξ^{p^n} of ξ with respect to the GF$[p^n]$, the defining invariant may be written $\sum \xi_i \bar{\xi}_i$.

([1]) *Quart. Journ. Math*, p. 1-16; 1898. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, p. 495-510; 1898. — *Amer. Journ. Math.*, p. 222-243; 1899.

([2]) *Bull. Amer. Math. Soc.*, Feb. and May 1898. — *Proc. Cal. Acad. Sciences*, (3), vol. I, n°s 4 and 5. — *Amer. Journ.*, vol. XXI, p. 193-256.

([3]) *American Journal of Mathematics*, vol. XXI, p. 193-256.

([4]) *Mathematische Annalen*, vol. LII, p. 568-581.

Digitized by Google

Whether or not there exist further systems of finite simple groups has not been determined. The particular forms chosen for the defining invariants do not involve as much specialization as is apparent. In fact, every linear group in a Galois field defined by a quadratic invariant may be transformed linearly into one of the hypoabelian or one of the orthogonal groups ([1]). Again, the structure of the linear homogeneous group in a Galois field defined by an invariant

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \xi_i^r \qquad (r > 2;\ \lambda_i \text{ in the field})$$

depends only upon the hyperorthogonal groups ([2]). Finally, no new simple groups are reached by the decomposition of the linear groups defined by the invariants ([3])

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_{i1}\xi_{i2}\cdots\xi_{iq}, \qquad \sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} \xi_{i1}^{(1)} & \xi_{i2}^{(1)} & \cdots & \xi_{iq}^{(1)} \\ \xi_{i1}^{(2)} & \xi_{i2}^{(2)} & \cdots & \xi_{iq}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{i1}^{(q)} & \xi_{i2}^{(q)} & \cdots & \xi_{iq}^{(q)} \end{vmatrix},$$

which for $q = 2$ define certain orthogonal, abelian and hypoabelian groups.

Just as there occur coincidences among the three systems of continuous simple groups, so also holoedric isomorphisms are found between certain groups of the nine known systems of finite simple groups. The group of linear fractional substitutions in the GF$[p^n]$ on one variable is isomorphic with the binary abelian group and the ternary orthogonal group in the GF$[p^n]$, as well as with the binary hyperorthogonal group in the GF$[p^{2n}]$. According as $p = 2$ or $p > 2$, the unary linear fractional group in the GF$[p^n]$ is isomorphic with the quaternary second hypoabelian group or the quaternary second orthogonal group in the GF$[p^n]$. According as p^n is of the form 2^n, $4l+1$ or $4l-1$, the linear fractional group in the GF$[p^n]$ on three variables is isomorphic with the senary first hypoabelian, the senary first orthogonal or the senary second orthogonal group ([4]). Similarly, according as $p^n = 2^n$, $4l+1$ or $4l-1$, the quaternary hyperorthogonal group in the GF$[p^{2n}]$ is isomorphic ([5])

([1]) *Amer. Journ.*, vol. XXI.
([2]) *Mathematische Annalen*, vol. LII, p. 561-581.
([3]) *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. XXX, p. 200-208. — *Quar. Journ.*, July, 1899.
([4]) *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. XXX, p. 70-98.
([5]) *Bulletin Amer. Math. Soc.*, p. 323-328; 1900. — *Transactions*, July, 1900.

Digitized by Google

with the senary second hypoabelian, the senary second orthogonal or the senary first orthogonal group in the GF$[p^n]$.

Until quite recently it had been an open question whether or not there exist simple groups of the same order which are not isomorphic. Independent proofs (1) show that the alternating group on eight letters is not isomorphic with the simple linear fractional group in the GF$[2^2]$ on two variables, each having the order $\frac{1}{2}8!$ Moreover, there exist two triply-infinite systems of simple groups of like order which are not isomorphic, viz., the simple groups derived from the abelian group on $2m$ indices and those derived from the first orthogonal group on $2m+1$ indices, where $m > 2$ (2). For $m = 1$ or $m = 2$, the simple groups in question are isomorphic.

---

(1) SCHOTTENFELS, *Annals of Math.*, 1900. — DICKSON, *American Journal*, vol. XXII, p. 231-252.

(2) *Quarterly Journal of Math.*, July, 1900.

Digitized by Google

Digitized by Google

A METHOD

OF

COMPUTING THE COMMON LOGARITHM

OF A NUMBER WITHOUT MAKING USE OF ANY LOGARITHM BUT THAT OF SOME POWER OF 10,

By Artemas MARTIN (Washington).

The series usually given in text-books on Algebra for the computation of Logarithms contain, at least, the logarithm of one other number besides the one sought, and therefore necessitate the use of a Table.

It is the object of this paper to deduce from the ordinary logarithmic series, converging series for the computation of the common logarithm of any given number independent of any other logarithm but the logarithm of 10^m, which is readily seen by inspection to be m.

I shall make use of the various known forms of logarithmic series without stopping to show how they were deduced.

I. In the well-known series

$$\log_e(a+x) = \log_e a + \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \ldots,$$

$$\log_e(a-x) = \log_e a - \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 - \ldots;$$

put $a = 10^m$; then will

$$(1) \quad \log_{10}(10^m + x) = m + \mathrm{M}\left[\frac{x}{10^m} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{10^m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{10^m}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{10^m}\right)^4 + \ldots\right],$$

$$(2) \quad \log_{10}(10^m - x) = m - \mathrm{M}\left[\frac{x}{10^m} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{10^m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{10^m}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{10^m}\right)^4 + \ldots\right],$$

where $\mathrm{M} = 0{,}43429448190325182765 +$, the modulus of common or Brigg's logarithms.

Digitized by Google

The series (1) and (2) are very convenient for the purposes of computation when x is a small number.

Examples. — 1. Find the common logarithm of 1002.

Solution. — Here $m = 3$ and $x = 2$, and (1) gives

$$\log_{10} 1002 = 3 + M\left[\frac{2}{10^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{10^3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{10^3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{10^3}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{10^3}\right)^5 - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{10^3}\right)^6 + \ldots\right].$$

$$= 3 + M(0,0019980026626 7 +),$$

$$= 3,000867721531 +,$$

which agrees to the last figure with the value given by Brigg's in his *Arithmetica Logarithmica* (London, 1624).

2. Find the common logarithm of 995.

Solution. — Here $m = 3$, $x = 5$, using (2), which gives

$$\log_{10} 995 = 3 - M\left[\frac{5}{10^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{10^3}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{10^3}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{10^3}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{5}{10^3}\right)^5 + \ldots\right],$$

$$= 3 - M(0,0050125418229 1 +),$$

$$= 3 - 0,0021769192 5 4 +,$$

$$= 2,997823080745 +,$$

which also agrees with Brigg's result.

II. Put $N = 10^m(1 + x)$, then

$$(3) \quad \begin{cases} \log_{10} N = m + M \log_e(1 + x), \\ \qquad = m + M\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \ldots\right). \end{cases}$$

Put $N = 10^m(1 - x)$, then

$$(4) \qquad \log_{10} N = m - M\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + \ldots\right).$$

When x is small, (3) and (4) will converge rapidly.

Examples. — 3. Find the common logarithm of 9900.

Solution. — $9900 = 10000\left(1 - \frac{1}{100}\right) = 10^4\left(1 - \frac{1}{100}\right)$; therefore

Digitized by Google

$m = 4$, $x = \frac{1}{100}$, and we have by (4)

$$\log_{10} 9900 = 4 - \mathrm{M}\left[\left(\frac{1}{100}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{100}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{100}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{100}\right)^5 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{100}\right)^6 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{100}\right)^7 + \ldots\right],$$
$$= 3{,}995635194597 +.$$

4. To find the common logarithm of 100160.

Solution. — $100160 = 100000\left(1 + \frac{16}{10000}\right) = 10^5\left(1 + \frac{16}{10000}\right)$; therefore $m = 5$, $x = \frac{16}{10000}$, and by (3) we have

$$\log_{10} 100160 = 5 + \mathrm{M}\left[\left(\frac{16}{10000}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{16}{10000}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{16}{10000}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{16}{10000}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{16}{10000}\right)^5 - \frac{1}{6}\left(\frac{16}{10000}\right)^6 + \ldots\right].$$
$$= 5{,}000694315866 +.$$

III. In the well-known series

$$\log_e x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{6}(x-1)^6 + \ldots,$$

put $x = \sqrt[n]{a}$, and we have

$$(5)\quad \left\{ \log_{10} a = \mathrm{M}\,n\left[(\sqrt[n]{a} - 1) - \frac{1}{2}(\sqrt[n]{a} - 1)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt[n]{a} - 1)^3 - \frac{1}{4}(\sqrt[n]{a} - 1) + \frac{1}{5}(\sqrt[n]{a} - 1) - \frac{1}{6}(\sqrt[n]{a} - 1)^6 + \ldots\right],\right.$$

where n may be any number whatever, and can be so chosen that $(\sqrt[n]{a} - 1)$ will be a very small quantity, a being greater than unity, and then the series will converge rapidly, and only a few terms will be required to determine the logarithm sought to several places of decimals; but when a is a large number, the labor will be very great. It will be most advantageous to take n equal some power of 2.

If n be taken a very large number, one term of the series will be sufficient and in that case we will have

$$(6)\qquad \log_{10} a = \mathrm{M}\,n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

If greater accuracy be desired, take two terms and have

$$(7)\qquad \log_{10} a = \mathrm{M}\,n\left[(\sqrt[n]{a} - 1) - \frac{1}{2}(\sqrt[n]{a} - 1)^2\right].$$

Digitized by Google

See Stephen Chase's *Treatise on Algebra,* New York (1849), pp. 252 and 254, where he takes $n = 2^{60}$. Brigg's took $n = 2^{54}$. A much smaller value of n will suffice when the logarithm is wanted to only 8 or 10 places of decimals.

Example. — 5. To find the common logarithm of 3.

Solution. — Taking $n = 2^{60}$, we have

$$\log_{10} 3 = \mathrm{M} \times n \times \left(3^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0,477121254719 66+.$$

IV. In (5), put $a = \frac{b}{10^m}$; then we have

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \log_{10} b = m + \mathrm{M}n \Big\{ & \left[\sqrt[n]{\left(\frac{b}{10^m}\right)} - 1\right] - \frac{1}{2}\left[\sqrt[n]{\left(\frac{b}{10^m}\right)} - 1\right]^2 \\ & + \frac{1}{3}\left[\sqrt[n]{\left(\frac{b}{10^m}\right)} - 1\right]^3 - \frac{1}{4}\left[\sqrt[n]{\left(\frac{b}{10^m}\right)} - 1\right]^4 \\ & + \frac{1}{5}\left[\sqrt[n]{\left(\frac{b}{10^m}\right)} - 1\right]^5 - \ldots \Big\}, \end{aligned} \right.$$

where, as in (5), n may be any number chosen at pleasure, but it will be best to take n some power of 2. This is a convenient series for numbers greater than 10.

If n be a large number, one term of the series within the braces will give the logarithm with sufficient accuracy for ordinary purposes. In that case we have

$$(9)\qquad \log_{10} b = m + \mathrm{M}n\left[\sqrt[n]{\left(\frac{b}{10^m}\right)} - 1\right].$$

If greater accuracy be required, take two terms and have

$$(10)\qquad \log_{10} b = m + \mathrm{M}n\left\{\left[\sqrt[n]{\left(\frac{b}{10^m}\right)} - 1\right] - \frac{1}{2}\left[\sqrt[n]{\left(\frac{b}{10^m}\right)} - 1\right]^2\right\}.$$

V. $$\mathrm{Log}_e x = \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^4 + \ldots.$$

Substituting $\sqrt[n]{\left(\frac{b}{10^m}\right)}$ for x we have

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \log_{10} b = m + \mathrm{M}n \Big\{ & \left[1 - \sqrt[n]{\left(\frac{10^m}{b}\right)}\right] + \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt[n]{\left(\frac{10^m}{b}\right)}\right]^2 \\ & + \frac{1}{3}\left[1 - \sqrt[n]{\left(\frac{10^m}{b}\right)}\right]^3 + \frac{1}{4}\left[1 - \sqrt[n]{\left(\frac{10^m}{b}\right)}\right]^4 + \ldots \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

where n may be as in (8)

VI. $$\operatorname{Log}_e\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = 2\left[\frac{x}{a} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{a}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x}{a}\right)^7 + \ldots\right].$$

Put

$$x = \frac{a^2}{2y+a},$$

then

$$\frac{a+x}{a-x} = \frac{y+a}{y},$$

and

$$\log_e(y+a) = \log_e y + 2\left[\frac{a}{2y+a} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2y+a}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{2y+a}\right)^5 + \ldots\right].$$

Let $y = 10^m$, then we have

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \log_{10}(10^m + a) = m + 2\mathrm{M}\Bigg\{&\frac{a}{2(10^m)+a} + \frac{1}{3}\left[\frac{a}{2(10^m)+a}\right]^3 \\ &+ \frac{1}{5}\left[\frac{a}{2(10^m)+a}\right]^5 + \frac{1}{7}\left[\frac{a}{2(10^m)+a}\right]^7 + \ldots\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Example. — 6. Find the common logarithm of 2.

Solution. — $2^{10} = 1024 = 1000 + 24 = 10^3 + 24$; therefore

$$\log_{10} 2^{10} = 10 \log_{10} 2 = \log_{10}(10^3 + 24),$$

and

$$\log_{10} 2 = \frac{1}{10}\log_{10}(10^3 + 24).$$

By (12),

$$\begin{aligned} \log_{10} 2 &= \frac{3}{10} + \frac{2}{10}\mathrm{M}\left[\frac{3}{253} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{253}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{253}\right)^5 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{7}\left(\frac{3}{253}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{9}{253}\right)^9 + \ldots\right], \\ &= 0,301029995663 +. \end{aligned}$$

If we put $x = \frac{a^2}{2y-a}$, we get $\frac{a+x}{a-x} = \frac{y}{y-a}$ and then

$$\log_e(y-a) = \log_e y - 2\left[\frac{a}{2y-a} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2y-a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{2y-a}\right)^5 + \ldots\right].$$

Take as before $y = 10^m$ and we have

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \log_{10}(10^m - a) = m - 2\mathrm{M}\Bigg\{&\frac{a}{2(10^m)-a} + \frac{1}{3}\left[\frac{a}{2(10^m)-a}\right]^3 \\ &+ \frac{1}{5}\left[\frac{a}{2(10^m)-a}\right]^5 + \frac{1}{7}\left[\frac{a}{2(10^m)-a}\right]^7 + \ldots\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Examples. — 7. Find the common logarithm of 3.

Solution. — $\text{Log}_{10} 3 = \frac{1}{2} \log_{10} 9 = \frac{1}{2} \log_{10}(10 - 1)$; therefore by (13),

$$\log_{10} 3 = 1 - 2M\left[\frac{1}{19} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{19}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{19}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{19}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{19}\right)^9 + \ldots\right],$$
$$= 0,477121254719 +.$$

8. To find the common logarithm of 5.

Solution. — $\log_{10} 5 = \frac{1}{3} \log_{10} 125 = \frac{1}{3} \log_{10}(100 + 25)$; therefore, by (12),

$$\log_{10} 5 = \frac{2}{3} + 2M\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^9 + \ldots\right],$$
$$= 0,698970004336 +.$$

9. To find the common logarithm of 7.

Solution. — $\text{Log}_{10} 7 = \log_{10}(10 - 3)$; therefore, by (13),

$$\log_{10} 7 = 1 - 2M\left[\frac{3}{17} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{17}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{17}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{3}{17}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{3}{19}\right)^9 + \ldots\right],$$
$$= 0,845098040014 +.$$

10. To find the common logarithm of 11.

Solution. — $\text{Log}_{10} 11 = \log_{10}(10 + 1)$; therefore, by (12),

$$\log_{10} 11 = 1 + 2M\left[\frac{1}{21} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{21}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{21}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{21}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{21}\right)^9 + \ldots\right].$$
$$= 1,041392685158 +.$$

VII. — Take

$$N = 10^m\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{m_1}\left[1 + \frac{1}{(10)^2}\right]^{m_2}\left[1 + \frac{1}{(10)^3}\right]^{m_3}\left[1 + \frac{1}{(10)^4}\right]^{m_4} \ldots:$$

then

$$(14)\left\{\begin{aligned} \log_{10} N = m + m_1 \log_{10}\left(1 + \frac{1}{10}\right) - m_2 \log\left[1 + \frac{1}{(10)^2}\right] + m_3 \log_{10}\left[1 + \frac{1}{(10)^3}\right] \\ + m_4 \log_{10}\left[1 + \frac{1}{(10)^4}\right] + m_5 \log_{10}\left[1 + \frac{1}{(10)^5}\right] + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

The logarithm of $\left[1 + \frac{1}{(10)^n}\right]$ may be had from the series

$$\log_{10}(1+x) = M\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \cdots \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \ldots\right),$$

by putting $x = \frac{1}{(10)^n}$; then

$$\log_{10}\left[1 + \frac{1}{(10)^n}\right] = M\left[\frac{1}{(10)^n} - \frac{1}{2(10^n)^2} + \frac{1}{3(10^n)_3} - \frac{1}{4(10^n)^4} + \ldots\right].$$

The above method is a modification of that made use of by Oliver Byrne in his little book on logarithms, but it requires the use of Tables or the computation of other logarithms than the one sought.

Digitized by Google

Digitized by Google

A RIGOROUS METHOD

OF

FINDING BIQUADRATE NUMBERS

WHOSE SUM IS A BIQUADRATE,

By Artemas MARTIN (Washington).

Euler and others have shown that the sum of two biquadrate numbers can not be a biquadrate; and Euler asserts (*Commentationes Arithmeticæ Collectæ*, vol. II, p. 281-282, 450, 456) that $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ is impossible, and states that he had not been able to find four biquadrate numbers whose sum is a biquadrate number, but that he had noticed that it is possible to determine in many ways *five* biquadrates whose sum is a biquadrate. The writer has not been able to find that Euler actually obtained any sets of five biquadrate numbers whose sum is a biquadrate.

In the *Mathematical Magazine*, vol. II, n° 10 (January, 1896), the writer published a paper, *About biquadrate numbers whose sum is a biquadrate,* in wich he employed tentative processes to find many sets of biquadrate numbers whose sum is a biquadrate.

I. To find five biquadrate numbers whose sum is a biquadrate number.

Solution. — Let v, w, x, y, z be the roots of the required biquadrates, and s the root of their sum; then

$$v^4 + w^4 + x^4 + y^4 + z^4 = s^4. \tag{1}$$

Assume $v = 2a$, $w = a - b$, $x = a + b$, $y = d$,

$$z = \frac{d^2 - e^2}{2e} \quad \text{and} \quad s = \frac{d^2 - e^2}{2e};$$

then, by substitution,

$$(2a)^4 + (a - b)^4 + (a + b)^4 + d^4 + \left(\frac{d^2 - e^2}{2e}\right)^4 = \left(\frac{d^2 + e^2}{2e}\right)^4.$$

Digitized by Google

Expanding, transposing, and uniting terms,

$$2(3a^2+b^2)^2+d^4=\frac{d^2(d^4+e^4)}{2e^2}.$$

Transposing d^4 and multiplying by $2e^2$,

$$4e^2(3a^2+b^2)^2=d^2(d^4+e^4)-2d^4e^2=d^2(d^4-2d^2e^2+e^4)=d^2(d^2-e^2)^2.$$

Extracting square root,

$$2e(3a^2+b^2)=d(d^2-e^2);$$

whence

$$(2)\qquad b^2=\frac{d(d^2-e^2)}{2e}-3a^2.$$

In (2), take $d=2e$ and we get

$$b^2=3e^2-3a^2=3(e^2-a^2)=3(e+a)(e-a),\qquad =\frac{m^2}{n^2}(e-a)^2 \text{ say:}$$

whence

$$a=\frac{(m^2-3n^2)e}{m^2+3n^2}.$$

Taking $e=2(m^2+3m^2)$ we have

$$a=2(m^2-3n^2),\qquad b=\frac{m}{n}(e-a)=12mn,\qquad d=2e=4(m^2+3n^2);$$

therefore

$$v=2a=4(m^2-3n^2),\qquad w=a-b=2m^2-12mn-6n^2,$$
$$x=a+b=2m^2+12mn-6n^2,\qquad y=d=2e=4(m^2+3n^2),$$
$$z=\frac{d^2-e^2}{2e}=\frac{3e}{2}=3(m^2+3n^2),\qquad s=\frac{d^2+e^2}{2e}=\frac{5e}{2}=5(m^2+3n^2).$$

Substituting in (1) we have

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}&(4m^2-12n^2)^4+(2m^2-12mn-6n^2)^4+(2m^2+12mn-6n^2)^4\\&\qquad+(4m^2+12n^2)^4+(3m^2-9n^2)^4=(5m^2+15n^2)^4.\end{aligned}\right.$$

Examples. — 1. Taking $m=1$, $n=1$, we have, after dividing by 4

$$2^4+2^4+3^4+4^4+4^4=5^4.$$

2. Taking $m=2$, $n=1$, we have

$$4^4+21^4+22^4+26^4+28^4=35^4.$$

3. Taking $m=1$, $n=2$, we have

$$2^4+39^4+44^4+46^4+52^4=65^4.$$

Digitized by Google

4. Taking $m = 4$, $n = 1$, we have

$$22^4 + 52^4 + 57^4 + 74^4 + 76^4 = 95^4.$$

5. Taking $m = 1$, $n = 4$, we have

$$46^4 + 142^4 + 147^4 + 188^4 + 196^4 = 245^4.$$

6. Taking $m = 4$, $n = 3$, we have

$$44^4 + 122^4 + 129^4 + 166^4 + 172^4 = 215^4.$$

7. Taking $m = 5$, $n = 2$, we have

$$52^4 + 94^4 + 111^4 + 146^4 + 148^4 = 185^4.$$

8. Taking $m = 2$, $n = 5$, we have

$$22^4 + 237^4 + 262^4 + 284^4 + 316^4 = 395^4.$$

9. Taking $m = 2$, $n = 3$, we have

$$26^4 + 92^4 + 93^4 + 118^4 + 124^4 = 155^4.$$

10. Taking $m = 1$, $n = 6$, we get

$$142^4 + 286^4 + 327^4 + 428^4 + 436^4 = 545^4.$$

11. Taking $m = 7$, $n = 2$, we get

$$94^4 + 148^4 + 183^4 + 242^4 + 244^4 = 305^4.$$

12. Taking $m = 2$, $n = 7$, we get

$$118^4 + 453^4 + 454^4 + 572^4 + 604^4 = 755^4.$$

13. Taking $m = 7$, $n = 4$, we get

$$4^4 + 291^4 + 334^4 + 338^4 + 388^4 = 485^4.$$

14. Taking $m = 4$, $n = 7$, we get

$$74^4 + 489^4 + 524^4 + 598^4 + 652^4 = 815^4.$$

15. Taking $m = 8$, $n = 1$, we get

$$26^4 + 201^4 + 218^4 + 244^4 + 268^4 = 335^4.$$

16. Taking $m = 1$, $n = 8$, we get

$$286^4 + 478^4 + 579^4 + 764^4 + 772^4 = 965^4.$$

Digitized by Google

When $n = 1$ in (3), then

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&(4m^2-12)^4+(2m^2-12m-6)^4+(2m^2+12m-6)^4\\&\qquad+(4m^2+12)^4+(3m^2+9)^4=(5m^2+15)^4,\end{aligned}\right.$$

and when $m = 1$ in (3), then

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}&(12n^2-4)^4+(6n^2+12n-2)^4+(6n^2-12n-2)^4\\&\qquad+(12n^2+4)^4+(9n^2+3)^4=(15n^2+5)^4.\end{aligned}\right.$$

Examples. — **17.** Taking $m = 10$ in (4), we get

$$74^4+309^4+314^4+388^4+412^4=515^4.$$

18. Taking $n = 11$ in (5), we get

$$149^4+214^4+273^4+362^4+364^4=455^4.$$

Take $d = 2$ in (2), then

$$b^2=\frac{4-e^2}{e}-3a^2=\frac{4-e^2-3a^2e}{e}.$$

Put $e = t^2$; then

$$b^2=\frac{4-t^4-3a^2t^2}{t^2}\qquad\text{and}\qquad b=\frac{\sqrt{(4-3a^2t^2-t^4)}}{t}.$$

Now let

$$4-3a^2t^2-t^4=(2-3t^2)^2$$

and we get

$$3a^2=12-10t^2,\qquad\text{or}\qquad a^2=4-\frac{10}{3}t^2=\left(2-\frac{p}{q}t\right)^2;$$

whence

$$t=\frac{12pq}{3p^2+10q^2}.$$

$$a=2-\frac{p}{q}t=\frac{20q^2-6p^2}{3p^2+10q^2},\qquad b=\frac{2-3t^2}{t},$$

$$e=t^2=\left(\frac{12pq}{3p^2+10q^2}\right)^2,\qquad d=2.$$

Another Method. — Assume

$$(6)\qquad (2x)^4+(x+y)^4+(x-y)^4+w^4+z^4=s^4.$$

Expanding and uniting terms we have

$$2(3x^2+y^2)^2+w^4+z^4=s^4.$$

Now take

$$3x^2+y^2=wz$$

Digitized by Google

and we have

$$w^2 + z^2 = s^2,$$

which is satisfied by

$$w = p^2 - q^2, \qquad z = 2pq, \qquad s = p^2 + q^2;$$

and by substitution (6) becomes

$$(7) \qquad (2x)^4 + (x+y)^4 + (x-y)^4 + (p^2-q^2)^4 + (2pq)^4 = (p^2+q^2)^4.$$

But

$$y^2 + 3x^2 = wz = 2pq(p^2-q^2),$$

whence

$$y = \pm\sqrt{[2pq(p^2-q^2) - 3x^2]}.$$

Hence we must have

$$(8) \qquad 2pq(p^2-q^2) - 3x^2 = \square.$$

Let $p = 2$, $q = 1$, then (8) becomes

$$12 - 3x^2 = 3(2-x)(2+x) = \square = \frac{m^2}{n^2}(2-x)^2 \text{ say},$$

and we get by reduction

$$x = \frac{2m^2 - 6n^2}{m^2 + 3n^2},$$

$$y = \frac{m}{n}(2-x) = \frac{12mn}{m^2+3n^2}, \qquad 2x = \frac{4m^2 - 12n^2}{m^2+3n^2},$$

$$x + y = \frac{2m^2 + 12mn - 6n^2}{m^2+3n^2}, \qquad x - y = \frac{2m^2 - 12mn - 6n^2}{m^2+3n^2},$$

$$w = 3, \qquad z = 4, \qquad s = 5.$$

Substituting these values in (6), and multiplying by $(m^2+3n^2)^4$, we have (3).

The artifice of putting $3x^2 + y^2 = wz$ is due to Mr. Cyrus-B. Haldeman of Ross, Butler Co, Ohio (U. S. A.), who has contributed an extended paper on biquadrates which will be published in n° 12, vol. II, of the *Mathematical Magazine* edited and published by the writer.

In order to obtain a more general solution of

$$2pq(p^2-q^2) - 3x^2 = \square,$$

put

$$2pq(p^2-q^2) - 3b^2 = \frac{3m^2}{n^2}(p+q)^2(p-q)^2;$$

Digitized by Google

then

$$\frac{3m^2}{n^2}(p+q)^2(p-q)^2-3x^2=\square,$$

or

$$3\left[\frac{m}{n}(p+q)(p-q)+x\right]\times\left[\frac{m}{n}(p+q)(p-q)-x\right]=\square.$$

Put

$$3\left[\frac{m}{n}(p+q)(p-q)+x\right]$$
$$\times\left[\frac{m}{n}(p+q)(p-q)-x\right]=\frac{r^2}{s^2}\left[\frac{m}{n}(p+q)(p-q)-x\right]^2:$$

then

$$3\left[\frac{m}{n}(p+q)(p-q)+x\right]=\frac{r^2}{s^2}\left[\frac{m}{n}(p+q)(p-q)-x\right],$$

from which we get

$$x=\frac{(mr^2-3ns^2)(p^2-q^2)}{n(r^2+3s^2)}.$$

From

$$2pq=\frac{3m^2}{n^2}(p^2-q^2)=\frac{3m^2p^2-3m^2q^2}{n^2}$$

we get

$$9p^2-\frac{6n^2pq}{m^2}=9q^2,$$

whence

$$\frac{p}{q}=\frac{n^2\pm\sqrt{(9m^4+n^4)}}{3m^2}.$$

We must yet make

$$(9)\qquad 9m^4+n^4=\square.$$

This is satisfied by $n=2m$; let, therefore,

$$m=t+b,\qquad n=2t+c,$$

and by substitution and reduction we have

$$(10)\quad 25t^4+(36b+32c)t^3+(54b^2+24c^2)t^2+(36b^3+8c^3)t+9b^4+c^4=\square.$$

Assume

$$(10)=\left[5t^2+\left(\frac{18b+16c}{5}\right)t+A\right]^2;$$

Digitized by Google

then by substitution and equating like terms we get

$$(11) \qquad 10\mathrm{A} + \frac{1}{25}(18b + 16c)^2 = 54b^2 + 24c^2,$$

$$(12) \qquad \frac{2}{5}\mathrm{A}(18b + 16c)t + \mathrm{A}^2 = (36b^2 + 8c^2)t + 9b^4 + c^4.$$

From (11) and (12) we easily find

$$\mathrm{A} = \frac{25(54b^2 + 24c^2) - (18b + 14c)^2}{250} = \frac{513b^2 - 288bc + 172c^2}{125},$$

$$t = \frac{5(9b^4 + c^4 - \mathrm{A}^2)}{2\mathrm{A}(18b + 16c) - 5(36b^2 + 8c^2)}.$$

Retracing our steps we have

$$t + b = m, \qquad 2t + c = n;$$

$$\frac{p}{q} = \frac{n^2 \pm \sqrt{[5t^2 + \frac{1}{5}(18b + 16c)t + \mathrm{A}]}}{3m^2},$$

$$x = \frac{(mr^2 - 3ns^2)(p^2 - q^2)}{n(r^2 + 3s^2)}, \qquad y = \pm\frac{r}{s}\left[\frac{m}{n}(p^2 - q^2) - x\right],$$

$$w = p^2 - q^2, \qquad z = 2pq.$$

This result is to complicated for convenient use, and the numbers in most cases, if not in all, will be large. Special solutions may be obtained which whill give better results.

If in (9) we put $n = 2m - d$ we get

$$(13) \qquad 25m^4 - 32m^3d + 24m^2d^2 - 8md^3 + d^4 = \square.$$

Now put

$$(13) = (5m^2 - 4md + d^2)^2$$

and we find

$$d = -4m, \qquad n = -2m,$$

and then

$$\frac{p}{q} = \frac{3}{1}.$$

Hence we may take $p = 3$, $q = 1$, which values being substituted in (8) lead us to the same result as arrived at in (3).

Putting $3b^2$ for $2pq(p^2 - q^2)$ in (8) we have

$$3(b^2 - x^2) = 3(b + x)(b - x) = \square, \qquad = \frac{m^2}{n^2}(b - x)^2 \text{ say},$$

Digitized by Google

whence

$$x = \frac{b(m^2 - 3n^2)}{m^2 + 3n^2};$$

then

$$y = \frac{m}{n}(b - x) = \frac{6bmn}{m^2 + 3n^2},$$

$$x + y = \frac{b(m^2 + 6mn - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}, \qquad x - y = \frac{b(m^2 - 6mn - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}.$$

Therefore we have by (7)

$$(14) \quad \left[\frac{2b(m^2 - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 + \left[\frac{b(m^2 - 6mn - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 + \left[\frac{b(m^2 + 6mn - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 = (p^2 - q^2)^4 + (2pq)^4 = (p^2 + q^2)^4.$$

For another solution of (8), put

$$p = s + 2q \quad \text{and} \quad x = t + 2q^2;$$

then by substitution we get

$$(15) \qquad 2qs^3 + 12q^2s^2 + 22q^3s - 3t^2 - 12tq^2 = \square.$$

Taking

$$-3t^2 - 12tq^2 = 0,$$

we have

$$t = -4q,$$

and then

$$2qs^3 + 12q^2s^2 + 22q^3s = \square, \qquad = \frac{4m^2}{n^2}q^2s^2 \text{ say};$$

whence

$$s^2 + 6qs + 11q^2 = \frac{2m^2}{n^2}qs.$$

By transposition,

$$s^2 + \left(6 - \frac{2m^4}{n^2}\right)qs = -11q^2;$$

whence

$$s = \frac{q(m^2 - 3n^2) = q\sqrt{(m^4 - 6m^2n^2 - 2n^4)}}{n^2}.$$

$$m = 3n \quad \text{satisfies} \quad m^4 - 6m^2n^2 - 2n^2 = \square,$$

and gives

$$s = 11, \quad q = 1; \quad \text{or} \quad s = 1, \quad q = 1;$$

and then

$$p = 13 \text{ or } 3;$$

Digitized by Google

also,

$$x = 2q^2 - 4q = -2;$$

$$y = \frac{2m}{n}(qs) = 3 \times 2 \times 11 = 66.$$

The values $p = 13$, $q = 3$ give, after dividing by 2^4,

$$2^4 + 13^4 + 32^4 + 34^4 + 84^4 = 85^4.$$

By similar methods six, seven, eight, and any number of biquadrates whose sum is a biquadrate may be found.

II. To find nine biquadrate numbers whose sum is a biquadrate number.

Solution. — Dividing (3) by $(m^2 + n^2)^4$, and then multiplying the quotient by 5^4, and also by 3^4, we have

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{20(m^2 - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 + \left[\frac{10(m^2 - 6mn - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 \\ &\qquad + \left[\frac{10(m^2 + 6mn - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 + 15^4 + 20^4 = 25^4, \end{aligned} \right.$$

and

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{12(m^2 - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 + \left[\frac{6(m^2 - 6mn + 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 \\ &\qquad + \left[\frac{6(m^2 + 6mn - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 + 9^4 + 12^4 = 15. \end{aligned} \right.$$

Substituting the value of 15^4 from (17) in (16) we get

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{12(m^2 - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 + \left[\frac{6(m^2 - 6mn - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 + \left[\frac{6(m^2 + 6mn - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 \\ &+ \left[\frac{20(m^2 - 3n^2)}{m^2 + 3n^2)}\right]^4 + \left[\frac{10(m^2 - 6mn - 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 + \left[\frac{10(m^2 + 6mn + 3n^2)}{m^2 + 3n^2}\right]^4 \\ &\qquad + 9^4 + 12^4 + 20^4 = 25^4. \end{aligned} \right.$$

Examples. — **19.** If $m = 2$, $n = 1$, then $m^2 + 3n^2 = 7$ and we have

$$12^4 + 20^4 + 63^4 + 66^4 + 78^4 + 84^4 + 110^4 + 130^4 + 140^4 = 175^4.$$

20. If $m = 1$, $n = 2$, then $m^2 + 2n^2 = 13$ and we have

$$6^4 + 10^4 + 117^4 + 132^4 + 138^4 + 156^4 + 220^4 + 230^4 + 260^4 = 325^4.$$

III. To find thirteen biquadrate numbers whose sum is a biquadrate number.

Digitized by Google

Solution. — Multiplying (18) by 5^4,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{60(m^2-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4+\left[\frac{30(m^2-6mn-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4+\left[\frac{30(m^2+6mn-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4\\ &+\left[\frac{100(m^2-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4+\left[\frac{50(m^2-6mn-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4+\left[\frac{50(m^2+6mn-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +45^4+60^4+100^4=125^4 \end{aligned}\right.$$

Multiplying (17) by 3^4,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{36(m^2-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4+\left[\frac{18(m^2-6mn-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4\\ &\qquad\qquad +\left[\frac{18(m^2+6m-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4+27^4+36^4=45^4. \end{aligned}\right.$$

Putting the left-hand member of (20) for 45^4 in (19), we have

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{36(m^2-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4+\left[\frac{18(m^2-6mn-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4+\left[\frac{18(m^2+6mn-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4\\ &+\left[\frac{60(m^2-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4+\left[\frac{30(m^2-6mn-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4+\left[\frac{30(m^2+6mn-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4\\ &+\left[\frac{100(m^2-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4+\left[\frac{50(m^2-6mn-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4+\left[\frac{50(m^2+6mn-3n^2)}{m^2+3n^2}\right]^4\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +27^4+36^4+60^4+100^4=125^4. \end{aligned}\right.$$

Example. — **21.** If $m=2$ and $n=1$, $m^2+3n^2=7$ and

$$36^4+60^4+100^4+189^4+198^4+234^4+252^4+330^4$$
$$+390^4+420^4+550^4+650^4+700^4=875^4.$$

In the same way can be found 17, 21, 25, 29, ..., $5+4t$ biquadrate numbers whose sum is a biquadrate number, where $t=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$.

Digitized by Google

UN NOUVEAU

SYSTÈME IRRÉDUCTIBLE DE POSTULATS

POUR L'ALGÈBRE

PAR M. ALESSANDRO PADOA (ROME).

I. — Avant-propos.

Dans l'*Introduction logique à une théorie déductive quelconque* qui précède notre *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers* (1), nous avons analysé la structure formelle d'une théorie déductive quelconque, pour établir les principales conditions de sa perfection logique et les règles pratiques pour reconnaître si ces conditions se trouvent vérifiées dans une théorie donnée.

Maintenant, nous ne faisons que rappeler ces conditions et énoncer ces règles, dont l'étude appartient à la logique générale, pour en faire une application mathématique à l'analyse des principes de l'Algèbre.

D'abord il faut *déclarer* quels sont les *symboles* dont on fait usage dans la théorie *sans les définir* (*symboles non définis*) et *énoncer* les *propositions* (*définitions* exceptées) qu'on accepte dans la théorie *sans les démontrer* (*postulats*) (2).

Les postulats doivent être **compatibles**; c'est-à-dire qu'ils ne doivent pas se *contredire*.

Pour **démontrer** *la compatibilité d'un système de postulats,* il faut trouver *une interprétation des symboles non définis, qui vérifie simultanément tous les postulats* (3).

(1) Communiqué au Congrès international de Philosophie (Paris, 3e série, t. VIII; 1900).

(2) Par une convention, fort commune d'ailleurs, nous *identifions* chaque *idée* avec le *symbole* qui la *représente* et chaque *fait* avec la *proposition* qui l'*énonce*.

(3) Chacune de ces interprétations vérifie nécessairement toutes les propositions de la théorie considérée.

Digitized by Google

Le système des postulats doit être **irréductible**; en d'autres termes, les *postulats* doivent être *absolument indépendants;* c'est-à-dire : il faut qu'*aucun des postulats* ne puisse être *déduit des autres;* ou bien encore: *il faut qu'en remplaçant séparément chaque postulat par sa négation on obtienne un système de propositions compatibles.*

Pour **démontrer** *l'irréductibilité d'un système de postulats,* il faut trouver, pour *chacun* d'eux, *une interprétation des symboles non définis, qui ne vérifie pas le postulat considéré, mais qui vérifie simultanément tous les autres.*

Le système des symboles non définis doit être **irréductible** *par rapport au système des postulats;* en d'autres termes, il faut que des *postulats* on ne puisse *déduire* aucune proposition qui soit une *définition possible d'un des symboles non définis* au moyen des autres (1).

Pour **démontrer** *l'irréductibilité d'un système de symboles non définis* par rapport à un *système de postulats,* il faut trouver *une interprétation des symboles non définis, qui vérifie simultanément tous les postulats, et qui continue à les vérifier lorsqu'on change convenablement la signification d'un seul des symboles non définis,* et cela pour *chacun d'eux.*

II. — Nos symboles non définis et nos postulats.

Nos *symboles non définis* (I) sont au nombre de *trois :*

1. **entier**,
2. **le successif de** (abrégé par **suc**),
3. **le symétrique de** (abrégé par **sym**).

Nos *postulats* (I) sont au nombre de *sept :*
Si a est un **entier** quelconque :

1. **suc** a est un **entier**,
2. **sym** a est un **entier**,
3. **sym**(**sym** a) $= a$ (2),
4. **sym**{**suc**[**sym**(**suc** a)]} $= a$.
5. Il y a un **entier** (3) x, tel que **sym** $x = x$.

---

(1) Ici nous considérons les seules *définitions nominales* (et non les *définitions par induction, par abstraction,* etc.).

(2) Le symbole $=$ (qu'on peut lire *est égal à* ou bien *est la même chose que*) appartient à la *logique générale,* ainsi que les symboles *classe, est un,* etc.

(3) Sans exclure qu'il y en ait plusieurs.

Digitized by Google

6. Il n'y a pas d'**entiers** x et y, différents entre eux, tels que **sym**$x = x$ et **sym**$y = y$.

7. Si une classe u vérifie les conditions

α) il y a un **entier** (1) qui appartient à la classe u,

β) toutes les fois qu'un **entier** x appartient à la classe u, **suc**x appartient aussi à la classe u,

γ) toutes les fois que x est un **entier** tel que **suc**x appartienne à la classe u, x appartient aussi à la classe u,

alors tout **entier** appartient à la classe u.

III. Compatibilité de nos postulats.

Nos *postulats* (II) sont *compatibles* (I).

En effet (I), voici une *interprétation* de nos *symboles non définis* (II) qui *vérifie simultanément* tous nos *postulats :*

entier signifie (2) *nombre entier relatif* (3),

et, si x est **entier** quelconque,

suc$x$ signifie $1 + x$,

sym$x$ signifie $-x$ (4).

IV. — Irréductibilité de notre système de postulats.

Notre *système de postulats* (II) est *irréductible* (I).

En effet (I), voici, pour *chacun* des *postulats, une interprétation* de

---

(1) Sans exclure qu'il y en ait *plusieurs*.

(2) Dans cette étude, après le mot *signifie*, il faut toujours *sous-entendre* les mots *ce que signifie d'ordinaire*.

(3) C'est-à-dire *nombre entier, positif ou négatif*, o *compris*.

(4) On constate immédiatement que *l'interprétation énoncée vérifie les postulats* 1, 2, 3; *elle vérifie aussi le postulat* 4, parce que

$$-\{1 + [-(1 + a)]\} = a.$$

Puisque o est un **entier** et **sym** o = o, *le postulat* 5 *est aussi vérifié*.

Puisque o est le *seul* **entier** x, tel que **sym**$x = x$, *le postulat* 6 *est aussi vérifié*.

Le postulat 7 *est aussi vérifié :* en effet, soit a un **entier** qui appartient à la classe u (cette supposition est légitime d'après la condition α), alors, à cause de la condition β, *tout entier plus grand* que a appartient aussi à la classe u; et, à la condition γ, *tout entier plus petit* que a appartient aussi à la classe u; par suite, tout **entier** appartient à la classe u.

Digitized by Google

nos *symboles non définis* (II), qui *ne vérifie pas* le *postulat considéré*, mais qui *vérifie simultanément* tous les *autres*.

Dans ces *interprétations*, a, b, c, d, e représentent des *objets quelconques*, mais *tous différents entre eux*.

1. Interprétation qui ne vérifie pas le seul postulat 1.

entier signifie classe dont le seul individu est a;
suc $a = b$, **suc** $b = a$;
sym $a = a$, **sym** $b = b$ (1).

2. Interprétation qui ne vérifie pas le seul postulat 2.

entier signifie nombre entier positif, o compris.
Et, si x est un *entier relatif* (2),
suc x signifie $1 + x$,
sym x signifie $-x$ (3).

3. Interprétation qui ne vérifie pas le seul postulat 3.

entier signifie ensemble des objets a, b, c, d,
suc $a = b$, **suc** $b = c$, **suc** $c = d$, **suc** $d = a$,
sym $a = a$, **sym** $b = d$, **sym** $c = b$, **sym** $d = c$ (4),

---

(1) *L'interprétation* 1 *ne vérifie pas le postulat* 1 (parce que, par hypothèse, a et b sont différents), mais on constate immédiatement qu'*elle vérifie les postulats* 2, 3, 5.

Elle vérifie aussi le postulat 4, parce que

$$\textbf{sym}\{\textbf{suc}[\textbf{sym}(\textbf{suc}\,a)]\} = \textbf{sym}[\textbf{suc}(\textbf{sym}\,b)] = \textbf{sym}(\textbf{suc}\,b) = \textbf{sym}\,a = a,$$

le postulat 6 (parce qu'il n'y a qu'*un* **entier**) *et le postulat* 7 (en effet, puisqu'il n'y a qu'*un* **entier**, de la seule condition α de son hypothèse on déduit immédiatement sa thèse).

(2) *Voir* la note (3) au § III.

(3) *L'interprétation* 2 *ne vérifie pas le postulat* 2 (car, par exemple, 1 est un **entier**, mais **sym** 1 n'est pas un **entier**), *tandis qu'elle vérifie tous les autres* [voir la note (4) au § III].

(4) *L'interprétation* 3 *ne vérifie pas le postulat* 3 [car, par exemple,

$$\textbf{sym}(\textbf{sym}\,b) = \textbf{sym}\,d = c],$$

mais on constate immédiatement qu'*elle vérifie les postulats* 1, 2, 5. *Elle vérifie aussi le postulat* 6 (parce que, par hypothèse, b, c, d sont tous différents entre

Digitized by Google

4. Interprétation qui ne vérifie pas le seul postulat 4.

entier signifie ensemble des objets a, b, c, d, e,
suc $a = b$, **suc** $b = c$, **suc** $c = d$, **suc** $d = e$, **suc** $e = a$,
sym $a = a$, **sym** $b = d$, **sym** $c = e$, **sym** $d = b$, **sym** $e = c$ (¹).

5. Interprétation qui ne vérifie pas le seul postulat 5.

entier signifie ensemble des objets a et b,
suc $a = b$, **suc** $b = a$,
sym $a = b$, **sym** $b = a$ (²).

---

eux), *le postulat* 4 (parce que

$$\begin{array}{l}\mathbf{sym}\{\mathbf{suc}[\mathbf{sym}(\mathbf{suc}\,a)]\} = \mathbf{sym}[\mathbf{suc}(\mathbf{sym}\,b)] = \mathbf{sym}(\mathbf{suc}\,d) = \mathbf{sym}\,a = a,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c\ldots\ldots\ldots\ldots b\ldots\ldots\ldots c\ldots b,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d\ldots\ldots\ldots\ldots c\ldots\ldots\ldots d\ldots c,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots b\ldots d)\end{array}$$

et le postulat 7 (parce que des seules conditions α et β de son hypothèse on déduit sa thèse).

(¹) *L'interprétation* 4 *ne vérifie pas le postulat* 4 (car, par exemple,

$$\mathbf{sym}\{\mathbf{suc}[\mathbf{sym}(\mathbf{suc}\,a)]\} = \mathbf{sym}[\mathbf{suc}(\mathbf{sym}\,b)] = \mathbf{sym}(\mathbf{suc}\,d) = \mathbf{sym}\,e = c),$$

mais on constate immédiatement qu'*elle vérifie les postulats* 1, 2, 5. *Elle vérifie aussi le postulat* 3 [parce que

$$\begin{array}{l}\mathbf{sym}(\mathbf{sym}\,a) = \mathbf{sym}\,a = a,\\ \ldots\ldots\ldots b\ldots\ldots\ldots d\ldots b,\\ \ldots\ldots\ldots c\ldots\ldots\ldots e\ldots c,\\ \ldots\ldots\ldots d\ldots\ldots\ldots b\ldots d,\\ \ldots\ldots\ldots e\ldots\ldots\ldots c\ldots e],\end{array}$$

le postulat 6 (parce que, par hypothèse, b, c, d, e sont tous différents entre eux) *et le postulat* 7 (parce que des seules conditions α et β de son hypothèse on déduit sa thèse).

(²) *L'interprétation* 5 *ne vérifie pas le postulat* 5 (parce que, par hypothèse, a et b sont différents), mais on constate immédiatement qu'*elle vérifie les postulats* 1, 2, 6.

Elle vérifie aussi le postulat 3 [parce que

$$\mathbf{sym}(\mathbf{sym}\,a) = \mathbf{sym}\,b = a, \qquad \mathbf{sym}(\mathbf{sym}\,b) = \mathbf{sym}\,a = b],$$

le postulat 4 (parce que

$$\begin{array}{l}\mathbf{sym}\{\mathbf{suc}[\mathbf{sym}(\mathbf{suc}\,a)]\} = \mathbf{sym}[\mathbf{suc}(\mathbf{sym}\,b)] = \mathbf{sym}(\mathbf{suc}\,a) = \mathbf{sym}\,b = a,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots\ldots b\ldots\ldots\ldots a\ldots b)\end{array}$$

et le postulat 7 (parce que des seules conditions α et β de son hypothèse on déduit sa thèse).

Digitized by Google

6. INTERPRÉTATION QUI NE VÉRIFIE PAS LE SEUL POSTULAT 6.

entier signifie ensemble des objets a et b,
suc $a = b$, **suc** $b = a$,
sym $a = a$, **sym** $b = b$ (1).

7. INTERPRÉTATION QUI NE VÉRIFIE PAS LE POSTULAT 7.

entier signifie ensemble des objets a, b, c,
suc $a = a$, **suc** $b = c$, **suc** $c = b$,
sym $a = a$, **sym** $b = c$, **sym** $c = b$ (2).

V. — Irréductibilité de notre système de symboles non définis par rapport à notre système de postulats.

Notre *système de symboles non définis* (II) est *irréductible* (I) par rapport à notre *système de postulats* (II). En voici la *démonstration* (I):

---

(1) *L'interprétation* 6 *ne vérifie pas le postulat* 6 (parce que, par hypothèse, a et b sont différents), mais on constate immédiatement qu'*elle vérifie les postulats* 1, 2, 3, 5.

Elle vérifie aussi le postulat 4 (parce que

$$\begin{aligned}&\mathbf{sym}\{\mathbf{suc}[\mathbf{sym}(\mathbf{suc}\,a)]\} = \mathbf{sym}[\mathbf{suc}(\mathbf{sym}\,b)] = \mathbf{sym}(\mathbf{suc}\,b) = \mathbf{sym}\,a = a,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots b\ldots b)\end{aligned}$$

et le postulat 7 (parce que des seules conditions α et β de son hypothèse on déduit sa thèse).

(2) *L'interprétation* 7 *ne vérifie pas le postulat* 7 (car si, par exemple, a est *le seul* **entier** qui appartient à la classe u, *cette classe vérifie* les trois conditions de l'*hypothèse du postulat* 7, *mais elle n'en vérifie pas la thèse*, parce que, par hypothèse, a, b, c sont tous différents entre eux); mais on constate immédiatement qu'*elle vérifie les postulats* 1, 2, 5, 6.

Elle vérifie aussi le postulat 3 [parce que

$$\begin{aligned}&\mathbf{sym}(\mathbf{sym}\,a) = \mathbf{sym}\,a = a,\\ &\ldots\ldots\ldots b\ldots\ldots\ldots c\ldots b,\\ &\ldots\ldots\ldots c\ldots\ldots\ldots b\ldots c]\end{aligned}$$

et le postulat 4 (parce que

$$\begin{aligned}&\mathbf{sym}\{\mathbf{suc}[\mathbf{sym}(\mathbf{suc}\,a)]\} = \mathbf{sym}[\mathbf{suc}(\mathbf{sym}\,a)] = \mathbf{sym}(\mathbf{suc}\,a) = \mathbf{sym}\,a = a,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c\ldots\ldots\ldots\ldots b\ldots\ldots\ldots c\ldots b,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b\ldots\ldots\ldots\ldots c\ldots\ldots\ldots b\ldots c).\end{aligned}$$

Digitized by Google

(Dans les *interprétations* suivantes, a, b, c, d, e, f représentent des *objets quelconques,* mais *tous différents entre eux.*)

Si

$$\mathbf{suc}\,a = b,\quad \mathbf{suc}\,b = c,\quad \mathbf{suc}\,c = a,\quad \mathbf{suc}\,d = e,\quad \mathbf{suc}\,e = f,\quad \mathbf{suc}\,f = d,$$
$$\mathbf{sym}\,a = a,\quad \mathbf{sym}\,b = c,\quad \mathbf{sym}\,c = b,\quad \mathbf{sym}\,d = d,\quad \mathbf{sym}\,e = f,\quad \mathbf{sym}\,f = e,$$

tous les postulats sont vérifiés, soit que

entier signifie ensemble des objets a, b, c,

soit que

entier signifie ensemble des objets d, e, f (1).

En considérant la *première* seulement des *significations* énoncées d'**entier**, nous savons donc que, *si*

entier signifie ensemble des objets a, b, c,
$$\mathbf{suc}\,a = b,\quad \mathbf{suc}\,b = c,\quad \mathbf{suc}\,c = a,$$
$$\mathbf{sym}\,a = a,\quad \mathbf{sym}\,b = c,\quad \mathbf{sym}\,c = b,$$

tous les postulats sont vérifiés.

Mais *ils continuent à être vérifiés si, en conservant ces interprétations d'***entier** *et de* **sym**,

$$\mathbf{suc}\,a = c,\quad \mathbf{suc}\,b = a,\quad \mathbf{suc}\,c = b \text{ (2)},$$

*et aussi si, en conservant les interprétations précédentes d'***entier** *et de* **suc**,

$$\mathbf{sym}\,a = b,\quad \mathbf{sym}\,b = a,\quad \mathbf{sym}\,c = c \text{ (3)}.$$

---

(1) En donnant à **entier** la *première* des *significations* énoncées, on constate immédiatement que *les postulats* 1, 2, 5, 6 *sont vérifiés;* pour le *postulat* 3, voir la note à l'interprétation 7 (IV); pour le *postulat* 4, on constate que

$$\mathbf{sym}\{\mathbf{suc}[\mathbf{sym}(\mathbf{suc}\,a)]\} = \mathbf{sym}[\mathbf{suc}(\mathbf{sym}\,b)] = \mathbf{sym}(\mathbf{suc}\,c) = \mathbf{sym}\,a = a,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c\ldots\ldots\ldots\ldots b\ldots\ldots\ldots c\ldots b,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots b\ldots c,$$

et pour le *postulat* 7 on constate que, des seules conditions α et β de son hypothèse, on déduit sa thèse.

Si l'on remplace réciproquement a avec d, b avec e, c avec f, la signification de **suc** ne change pas et celle de **sym** non plus, tandis que les deux significations d'**entier** se remplacent réciproquement. Par suite, en donnant à **entier** la *seconde* des *significations* énoncées, *tous les postulats sont aussi vérifiés.*

(2) En effet, nous n'avons fait qu'échanger b et c.

(3) En effet, nous n'avons fait qu'échanger a et c, b et a, c et b.

Digitized by Google

Ainsi nous avons *démontré* que *notre système de symboles non définis* et *notre système de postulats* satisfont à toutes les *conditions logiques* que nous avons énoncées dans le § I [1].

---

[1] Pour les *définitions* des *autres symboles* de cette théorie (moyennant *nos symboles non définis*) et les *démonstrations* des *autres propositions* de cette théorie (moyennant *nos postulats*), voir l'*Essai* que nous avons cité au commencement (*Bibl. du Congrès int. de Phil.*, t. III, p. 309-365; Armand Colin, Paris, 1901), ou sa traduction idéographique [*Numeri interi relativi* (*Revue de Math.*, t. VIII, n° 2, p. 73-84; Bocca frères, Turin, 1901)].

Digitized by Google

APERÇU SUR LES DÉVELOPPEMENTS RÉCENTS

DE LA

THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES,

PAR M. H. PADÉ (POITIERS).

Les développements de la théorie des fractions continues dont il est question dans cette Communication [1] ont leur origine dans l'examen de cette question : Que faut-il entendre par le *développement en fraction continue* d'une fonction?

1. Une généralisation facile de la théorie des fractions continues arithmétiques a conduit, depuis longtemps, à la notion du développement en fraction continue d'une fonction représentée par une série ordonnée suivant les puissances *décroissantes* de la variable :

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots$$

Les numérateurs partiels de cette fraction continue sont égaux à l'unité, ses dénominateurs partiels sont des polynomes entiers en z, et ses réduites sont caractérisées par la propriété que chacune d'elles donne une approximation dont l'ordre est supérieur au double du degré de son dénominateur. Dans ce qui suit, je donnerai, pour abréger, à cette fraction continue le nom de *développement canonique* relatif à la fonction $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

La notion du développement en fraction continue ne se présente pas avec la même simplicité quand il s'agit d'une fonction ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable. Un exemple va le montrer immédiatement.

(1) J'ai cru pouvoir, en rédigeant cette Communication, la compléter en quelques points que le peu de temps accordé par le règlement des séances du Congrès ne m'a pas permis de développer oralement.

Digitized by Google

2. Considérons le cas de la fonction exponentielle

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots;$$

cinq développements en fractions continues de cette fonction ont été donnés avant ces dix dernières années (¹). Deux proviennent des formules générales d'Euler et de Gauss; les trois autres ont été donnés spécialement pour la fonction e^x par Lagrange.

Par leur aspect extérieur, ces cinq développements présentent à la fois des analogies et des différences faciles à apercevoir; mais si l'on fait le calcul des premières réduites de chacun d'eux, on reconnaît immédiatement qu'il n'en est pas deux pour lesquels ces réduites ne soient différentes; et c'est alors que l'on se trouve en face de cette question : Quel sens précis faut-il attribuer à cette locution de *développement en fraction continue* d'une fonction? Et, en outre : Quel est le nombre de ces développements? par qui sont-ils caractérisés? quelles relations ont-ils entre eux? etc. (²).

C'est ainsi que, dans une Communication faite, le 7 février 1876, à la Société royale d'Edimbourg, M. Thomas Muir remarque que deux développements en fractions continues de arc tang x (dont l'un est celui d'Euler) *ne s'accordent pas dans le fond*, en ce sens qu'ils n'ont pas les mêmes réduites. Dans une autre Communication, du 10 février 1876, à la Société mathématique de Londres, il met en parallèle le développement classique de Gauss avec la fraction continue déduite, pour la fonction

$$(1) \qquad \frac{F(\alpha+1.\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)},$$

(¹) Les auditeurs de cette Communication avaient reçu une feuille où étaient reproduites les formules nécessaires pour suivre aisément mon exposition; ces formules n'étant pas données ici, je renverrai simplement à mon Mémoire : *Sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XVI; 1899), d'où elles avaient été en grande partie extraites.

(²) Après avoir donné sa célèbre fraction continue et celles qui en découlent, Gauss s'exprime ainsi : *asserique potest vix ullas fractiones continuas secundum legem obviam progredientes ab analystis hactenus erutas esse, quæ sub nostris tanquam casus speciales non sint contentæ.* En réalité, la fraction continue de Gauss, pour e^x, est distincte, comme nous venons de le dire, des fractions continues, relatives à la même fonction, d'Euler et de Lagrange, qui lui sont antérieures. La fraction de Gauss ne renferme, comme cas particulier, aucune des fractions données antérieurement; elle ajoute seulement, pour les fonctions particulières auxquelles elle s'applique, une nouvelle fraction à celles déjà connues antérieurement.

Digitized by Google

de la relation qui lie les trois fonctions

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x), \quad F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, x).$$

Rien n'est plus propre que ces deux Notes, présentées à la même époque, par le même auteur, à faire sentir la difficulté vis-à-vis de laquelle on se trouve. Les fractions continues données pour arc tang x méritent bien, en effet, le nom de *développement en fraction continue* de arc tang x, mais non pas la fraction continue que M. Muir fait correspondre au quotient précédent de deux fonctions hypergéométriques; outre que, au point de vue formel, celle-ci présente déjà, avec toutes les précédentes, cette différence fondamentale que les numérateurs partiels ne sont plus de simples monomes, elle ne se rattache aucunement à la fonction (1) par le *lien* essentiel qui, à mon sens, caractérise un *développement en fraction continue* de cette fonction, et qui est la base des considérations qui vont suivre.

3. Ce lien est constitué par cette propriété, *commune à toutes les réduites des différentes fractions,* que chacune de ces réduites, développée en série de Maclaurin, reproduit la série qui définit la fonction jusqu'à un terme inclusivement de degré au moins égal à la somme des degrés des termes de la réduite.

Ainsi s'offre d'elle-même la question plus générale de l'étude des fractions rationnelles satisfaisant, pour une fonction donnée, à cette condition d'approximation; et voici les principaux résultats auxquels elle conduit, et que j'ai fait connaître dans ma Thèse de doctorat : *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. IX, 1892).

A chaque couple (μ, ν) de nombres entiers positifs ou nuls, ou, si l'on veut, à chaque point (μ, ν) du plan xOy, correspond une fraction rationnelle et une seule, à savoir : l'unique fraction rationnelle irréductible qui, pour x infiniment petit, diffère de la fonction d'une quantité dont l'ordre infinitésimal est le plus grand possible, tout en satisfaisant à ces conditions, que le degré du dénominateur soit au plus égal à μ et le degré du numérateur au plus égal à ν. Je la nomme la *fraction rationnelle approchée* relative au point (μ, ν).

L'ordre de l'approximation donnée par cette fraction est d'ailleurs toujours plus grand que la somme des degrés de ses termes.

Dans le cas général, ces degrés sont égaux précisément à μ et ν, et l'ordre de l'approximation est égal à $\mu + \nu + 1$. C'est ce qui a lieu, par

Digitized by Google

exemple, quel que soit le point (μ, ν), pour la fonction e^x. La fraction est alors dite *normale*.

Dans un tableau uniquement composé de fractions normales, tel que celui qui est relatif à e^x, il y a lieu de considérer *neuf dispositions élémentaires* de trois points A, B, C, dans chacune desquelles chaque point est *contigu* au précédent et *plus avancé* que lui dans le tableau. Pour une telle disposition, les numérateurs A_1, B_1, C_1 et les dénominateurs A_2, B_2, C_2 satisfont à une même relation de récurrence

$$\alpha A + aB = C, \tag{2}$$

où α est un monome à coefficient et exposant différents de zéro, et a un polynome à terme constant différent de zéro. De telles relations ont déjà été données par M. Frobenius dans son Mémoire *Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen* (*Journal de Crelle*, t. 90, 1881).

Si l'on considère maintenant une suite A, B, C, D,... limitée ou illimitée de points tels que trois consécutifs quelconques offrent toujours l'une des neuf dispositions élémentaires, il est évident, par suite de l'existence des relations de récurrence, que les fractions correspondantes seront les réduites consécutives d'une fraction continue, ayant pour numérateurs partiels les monomes α et pour dénominateurs partiels les polynomes a qui se présentent dans les formules de récurrence successives.

Pour des dispositions régulières convenables de points, on obtiendra des fractions continues offant une parfaite régularité. Pour la fonction e^x, par exemple, ces fractions régulières sont au nombre de six; mais ce sont des fractions dont chacune renferme une indéterminée à laquelle peut être attribuée une valeur entière positive ou nulle quelconque, en sorte que chacune des six fractions en renferme une infinité d'autres. Les cinq fractions antérieurement connues et dont j'ai parlé précédemment (n° 2) se retrouvent ainsi, comme des cas très particuliers, parmi tous les développements réguliers en nombre illimité auxquels donne naissance le tableau des fractions rationnelles approchées de e^x.

J'arrive maintenant au cas plus compliqué où le tableau des fractions rationnelles approchées renferme une ou plusieurs fractions anormales.

La distribution de ces fractions dans le tableau se fait suivant une loi d'une grande simplicité : une fraction anormale correspond toujours à tous les points d'un carré dont les côtés sont parallèles aux axes, et dont le côté comprend un nombre de points égal à la différence entre la somme des degrés des termes et l'ordre de l'approximation.

Digitized by Google

Pour avoir, dans ce cas, une relation de récurrence à trois termes, telle que la relation (2), il suffit encore de considérer les fractions qui correspondent à trois points *contigus et progressants;* mais la définition de ces expressions exige ici des détails dans lesquels je n'entrerai pas.

Si l'on considère une suite de points dont trois consécutifs quelconques satisfassent à la condition précédente d'être contigus et progressants, il lui correspond un développement en fraction continue de la fonction.

Nous arrivons ainsi aux conclusions suivantes :

Étant donnée une fonction développable par la formule de Maclaurin, il correspond, à chaque point du plan de coordonnées entières positives ou nulles, une fraction rationnelle spéciale, dite fraction rationnelle approchée de la fonction, *caractérisée par certaines conditions qui la déterminent complètement.*

A une succession de points convenablement choisis dans le plan correspond un développement en fraction continue de la fonction, les réduites n'étant autres que les fractions rationnelles approchées relatives aux points de la succession considérée.

Au point de vue formel, les différentes fractions continues ainsi formées ont en commun ces caractères que tous les numérateurs partiels sont des monomes à coefficient et exposant différents de zéro, et tous les dénominateurs partiels des polynomes rationnels et entiers à terme constant différent de zéro. Au point de vue du fond, elles sont caractérisées par ces conditions que toutes leurs réduites appartiennent au tableau des fractions rationnelles approchées de la fonction, et donnent une approximation dont l'ordre croît constamment quand on passe d'une réduite à la suivante.

Ce sont ces fractions continues que j'ai nommées les *fractions continues holoïdes* de la fonction [Mémoire *Sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XVI; 1899]; et il y a lieu enfin d'ajouter que : *Parmi les fractions continues holoïdes, il faut distinguer, dans le cas où elles existent, les fractions continues régulières qui renferment comme cas très particuliers les développements en fractions continues antérieurement connues pour quelques fonctions spéciales.*

4. J'examinerai succinctement les conséquences les plus immédiates de ces nouvelles notions.

La première question qui s'offre est celle de la recherche des rapports qui existent entre l'unique développement canonique relatif à la fonc-

Digitized by Google

tion $f\left(\frac{1}{z}\right)$ et les fractions continues holoïdes, en nombre infini, qui correspondent à la fonction $f(x)$.

On trouve immédiatement, par le changement de $\frac{1}{z}$ en x, que cette fraction canonique correspond à la fraction continue holoïde qui donne les réduites de la bissectrice $y = x$ du tableau des fractions rationnelles approchées. Si, sur cette bissectrice, se rencontrent des fractions anormales, celles-ci se trouvent signalées, dans le développement canonique, par une élévation correspondante du degré des quotients incomplets. Un tel quotient, en effet, est toujours de degré égal au nombre des points de la bissectrice auxquels correspond la réduite précédant celle à laquelle il se rapporte lui-même, c'est-à-dire celle que l'on obtient en limitant la fraction continue à ce quotient incomplet.

Si α désigne un nombre entier positif, la fraction continue holoïde donnée par les points de la parallèle $y = x + \alpha$ à la bissectrice correspond au développement canonique de la fonction $z^\alpha f\left(\frac{1}{z}\right)$. J'ai énoncé cette proposition dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 15 janvier 1900. Elle fait entrevoir immédiatement la différence profonde qui sépare le cas des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable, et celui des séries ordonnées suivant les puissances décroissantes de la variable; elle donne, sans doute, la raison intime des difficultés rencontrées par M. Hermite dans sa tentative de passer, par simple analogie, du premier cas au second [*Sur la généralisation des fractions continues algébriques* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 2e série, t. XXI; 1893)].

5. En se limitant toujours au cas des fonctions d'une seule variable, la question de la généralisation de la théorie des fractions continues peut être envisagée de deux points de vue différents.

Et d'abord, au lieu de considérer le *seul* point zéro de la fonction $f(x)$, on peut demander de représenter approximativement la fonction par une même fraction rationnelle, dans le voisinage de *plusieurs* points discrets, l'ordre de l'approximation étant donné, *a priori*, pour chacun d'eux, en ce sens que, en chacun de ces points, la fraction et un nombre déterminé de ses dérivées successives doivent acquérir les mêmes valeurs respectivement que la fonction et ses dérivées. Cette idée, émise déjà par Jacobi en 1845, dans son Mémoire *Ueber die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function* (*Journal de Crelle*, t. 30), est celle-là même qui a inspiré à M. Her-

Digitized by Google

mite ses belles recherches *Sur la formule d'interpolation de Lagrange* (*Journal de Crelle*, t. 84; 1878).

Dans le cas extrême où tous les points considérés sont regardés comme *simples*, la fraction qui résout la question n'est autre que la fraction d'interpolation de Cauchy. J'ai indiqué récemment (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 12 mars 1900) comment se généralisent, dans ce cas, toutes les propriétés que j'ai fait connaître plus haut d'un tableau de fractions rationnelles approchées toutes normales.

Le second point de vue, duquel on peut encore envisager la généralisation en question, a aussi son origine dans les travaux de Jacobi. C'est celui auquel s'est placé M. Hermite dans son Mémoire, cité précédemment, *Sur la généralisation des fractions continues algébriques*.

Il consiste à rechercher les systèmes de trois polynomes P, Q, R, tels que, pour des limites supérieures fixées *a priori* de leurs degrés respectifs, l'expression $PS_1+QS_2+RS_3$, où S_1, S_2, S_3 sont trois séries entières données, soit d'ordre infinitésimal maximum. C'est à cette question que Tchebichef, généralisant les recherches d'Abel sur les intégrales pseudo-elliptiques, a rattaché la détermination en termes finis des intégrales abéliennes qui dépendent d'un radical cubique.

La notion de l'ensemble des fractions rationnelles approchées, remplacées ici par des systèmes de trois polynomes, celles des lois de récurrence, de la généralisation des fractions continues holoïdes, des fractions continues régulières, etc., s'étendent encore à ce cas beaucoup plus difficile, et même au cas où il s'agit de l'expression linéaire générale

$$P_1S_1+P_2S_2+\ldots+P_nS_n.$$

C'est ce que j'ai montré dans mon Mémoire *Sur la généralisation des fractions continues algébriques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. X; 1894).

6. Je voudrais, en terminant, indiquer le rôle que me paraissent appelées à jouer dans les applications les nouvelles notions introduites dans la théorie.

Ces applications ont toujours été basées, jusqu'ici, soit sur le développement canonique, soit sur un nombre très limité de fractions continues holoïdes de la fonction. Ainsi, Tchebichef, dans ses admirables recherches relatives aux questions de maximum et de minimum, à l'intégration sous forme finie des différentielles algébriques, à l'interpolation et l'évaluation approchée des intégrales définies, etc., semble n'avoir fait usage que de l'unique développement canonique; Jacobi et Halphen n'ont envisagé que

Digitized by Google

deux des fractions holoïdes régulières correspondantes au radical elliptique qu'ils développent; Stieltjes, enfin, dans son beau et dernier Mémoire si hautement apprécié par M. Poincaré, n'a considéré qu'une fraction descendante spéciale, correspondante à une fraction continue holoïde régulière donnant deux catégories de réduites douées de propriétés différentes; et l'on pourrait multiplier les exemples.

N'est-il pas légitime de croire que les propriétés reconnues à quelques-unes des fractions continues holoïdes qui correspondent à une fonction doivent, dans des cas étendus, convenir encore aux autres fractions continues holoïdes de la fonction. On le pensera certainement, en songeant à l'identité du lien qui rattache ces diverses fractions à la fonction, leurs réduites venant toutes se confondre, sous un point de vue commun, dans l'ensemble des fractions rationnelles approchées de la fonction.

La plus grande partie des résultats obtenus jusqu'ici par l'usage des fractions continues me semble donc devoir se prêter à une large généralisation; et l'on doit même s'attendre à ce que cette généralisation seule leur fasse acquérir le plus grand degré de simplicité dont ils sont susceptibles.

Digitized by Google

SECTION II. — ANALYSE.

SUR L'ÉVANOUISSEMENT DES FONCTIONS Θ DE PLUSIEURS VARIABLES,

PAR M. TIKHOMANDRITZKY (KHARKOFF).

On sait que la fonction

$$\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}) \tag{1}$$

de p variables indépendantes $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, définies par les équations

$$u_h = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p) \tag{2}$$

($\overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}}$ étant l'intégrale abélienne de première espèce) devient égale à zéro : 1° lorsque quelques-uns des points $(x_i, \overset{p}{\underset{1}{y_i}})$ viennent tomber au point (ξ, y_ξ), ou 2° lorsque tous les points $(x_i, \overset{p}{\underset{1}{y_i}})$ viennent sur une même courbe adjointe de première espèce

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0, \tag{3}$$

l'équation fondamentale du genre p étant

$$\mathcal{F}(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0. \tag{4}$$

Si l'on définit (ce que je tiens pour le plus naturel) la fonction Θ d'après

Digitized by Google

Weierstrass au moyen des transcendantes abéliennes de deuxième espèce

$$(5)\qquad \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k = \sum_{i=1}^{p} \Pi_k^{x_i}_{x_0}$$

[$\Pi_k^{x_i}_{x_0}$ désignant l'intégrale de seconde espèce, laquelle devient infinie ∞^1 au point fondamental (a_k, b_k)] par les équations

$$(6)\qquad \Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} \mid \xi) = \int \sum_{k=1}^{p} [C_k + \vartheta(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}})_k]\, du_k,$$

$$(7)\qquad \Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{I_h}}) = e^{\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} \mid \xi)},$$

on doit déduire la propriété mentionnée de cette fonction de celles de la transcendante abélienne de la deuxième espèce (5); c'est à cela qu'est consacrée cette Note.

1. Les arguments de cette transcendante dans l'équation (6) peuvent être exprimés par les sommes des intégrales de première espèce à l'aide du théorème d'Abel

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{I_h}} = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{I_h}} + \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}},$$

les points (ξ, y_ξ) et $(\alpha_i, \overset{p}{\underset{1}{y_{\alpha_i}}})$ étant les zéros et les points $(x_i, \overset{p}{\underset{1}{y_i}})$ et (a_k, b_k) les infinis de la fonction principale de la variable (z, y_z)

$$(9)\qquad \mathfrak{P}_{z,\xi}(a_k, b_k;\, x_i, \overset{p}{\underset{1}{y_i}});$$

mais on ne réussirait pas à représenter ainsi la transcendante ϑ de (6) par celle de (5), car le théorème d'Abel pour les intégrales de la deuxième espèce devient illusoire, lorsque l'une des limites de l'intégrale se confond avec son paramètre; c'est pourquoi nous prendrons pour point de départ la fonction principale

$$(10)\qquad \mathfrak{P}_{z\xi}(x', y';\, x_i, \overset{p}{\underset{1}{y_i}})$$

(x', y') désignant un point très rapproché du point (a_k, b_k), mais non pas

Digitized by Google

confondu avec lui. Alors on aura, par le théorème d'Abel :

$$\sum_{i=1}^{p} \underset{a_i}{\overset{\alpha_i}{\mathrm{I}}}_h = \sum_{i=1}^{p} \underset{a_i}{\overset{x_i}{\mathrm{I}}}_h + \underset{\xi}{\overset{x'}{\mathrm{I}}}_h, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \underset{x_0}{\overset{\alpha_i}{\mathrm{II}}}_k = \sum_{i=1}^{p} \underset{x_0}{\overset{x_i}{\mathrm{II}}}_k + \underset{x_0}{\overset{x'}{\mathrm{II}}}_k - \mathrm{D}_{a_k} \log \mathfrak{P}_{a_k \xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) \tag{12}$$

$\left(\text{où l'on a } \mathrm{D}_{a_k} = \dfrac{\partial \mathfrak{F}(a_k, b_k)}{\partial b_k} \dfrac{d}{d_{a_k}}\right)$. Comme on a pour (x', y') très rapproché de (a_k, b_k)

$$\underset{\xi}{\overset{x'}{\mathrm{II}}}_k = \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{F}(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x' - a_k} + \mathfrak{P}(x' - \alpha_k), \tag{13}$$

$$\mathfrak{P}_{a_k \xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = -\frac{\dfrac{\partial \mathfrak{F}(x', y')}{\partial y'}}{x' - a_k} + \mathfrak{P}_1(x' - a_k), \tag{14}$$

on trouvera aisément qu'à la limite, lorsque le point (x', y') se confondra avec le point (a_k, b_k), le second membre de l'équation aura une valeur finie et déterminée. Par la même méthode des limites on pourrait discuter le cas où quelques-uns des points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, en nombre λ par exemple, coïncideraient avec le point (ξ, y_ξ); mais l'autre cas, celui de l'indétermination, le cas où les points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ viennent sur la courbe adjointe de première espèce (3), échappe à cette méthode, appliquée directement; c'est pourquoi nous allons donner d'abord à la fonction principale une autre forme.

2. Nous écrirons maintenant après l'argument de la fonction adjointe ses zéros arbitraires et puis ses zéros non arbitraires, en les séparant des premiers par un trait vertical. Ainsi

$$\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; x_i, \overset{p-1}{\underset{1}{y_i}} \mid x'_i, y'_i) \tag{15}$$

représentera une fonction adjointe de première espèce avec les $p-1$ zéros arbitraires aux points $(\overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ et les autres $p-1$ zéros, qui sont complètement définis par ceux-ci, aux points $(\overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})$. De même

$$\mathfrak{P}_{x', x_p}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi \mid \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}}) \tag{16}$$

Digitized by Google

représentera une fonction adjointe de troisième espèce avec les infinis (paramètres) aux points (x', y') et (x_p, y_p), laquelle a ses p zéros arbitraires aux points $(\overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ et (ξ, y_ξ) et les zéros non arbitraires aux points $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$, ces derniers étant les mêmes que les p autres que (ξ, y_ξ) zéros de la fonction (10), car ils sont déterminés d'après les mêmes données (x', y'), $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, (ξ, y_ξ), seulement maintenant par l'intermédiaire des $(\overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})$. Il est facile de vérifier qu'on aura

$$(17) \qquad \mathfrak{P}_{z\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = -\frac{\mathfrak{P}_{x', x_p}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi \mid \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})}{\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; \overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i \mid x'_i, y'_i}})};$$

c'est sous cette forme nouvelle de la fonction principale que nous allons la considérer maintenant.

Lorsque le point (x_p, y_p) viendra coïncider avec le point (ξ, y_ξ) ou avec l'un des points $(\overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})$, par exemple avec le point (x'_{p-1}, y'_{p-1}), comme l'un des deux infinis de la fonction (16) sera absorbé par l'un de ses zéros arbitraires, l'*un de ses zéros non arbitraires* (α_p, y_{α_p}), par exemple, *doit coïncider avec l'autre infini* (x', y') *de la fonction*, pour l'absorber aussi, car il n'existe pas de fonctions adjointes qui auraient un seul infini. Donc, dans les deux cas, la fonction (16) se réduira à une fonction adjointe de première espèce : dans le premier cas, à

$$(18) \qquad \varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y}; x'_i, y'_i \mid \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}}),$$

à quoi l'on aura, comme il est aisé de voir :

$$(19) \qquad (\overset{p-1}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}}) = (\overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i}}),$$

dans le second à

$$(20) \qquad \varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; \overset{p-2}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi \mid \overset{p-1}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}}),$$

les équations (19) n'ayant pas lieu maintenant. Dans le dernier cas, la fonction (17) reviendra à la fonction

$$(21) \qquad \frac{\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; \overset{p-2}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi \mid \overset{p-1}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})}{\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; x_i, y_i \mid \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})},$$

Digitized by Google

qui aura les p infinis aux points $(x_i, \overset{p}{\underset{1}{y_i}})$, car on a $x_p = x'_{p-1}, y_p = y'_{p-1}$; et les zéros aux p points (ξ, y_ξ) et $(\alpha_i, \overset{p-1}{\underset{1}{y_{\alpha_i}}})$, les points $(\overset{p-2}{\underset{1}{x'_i}}, \overset{p-2}{\underset{1}{y'_i}})$ étant les zéros communs du numérateur et du dénominateur. On aura donc dans ce cas, par le théorème d'Abel,

$$(22) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{p-1} \overset{\alpha_i}{\underset{x_i}{\mathrm{I}_h}} + \overset{\xi}{\underset{x_p}{\mathrm{I}_h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p);$$

en ajoutant cette équation à l'équation (2), on aura

$$(23) \qquad u_h = \sum_{i=1}^{p-1} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} + \overset{\xi}{\underset{a_p}{\mathrm{I}_h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Mais c'est justement la même forme que prend, en vertu des équations (19), l'expression de u_h dans le premier cas, lorsque (x_p, y_p) vient tomber en (ξ, y_ξ). Donc, à l'aide de l'équation (22), qui existe dans le second cas, ce cas est ramené au premier. Il ne reste donc à considérer que ce premier cas.

3. Dans le premier cas, en vertu de (19), la fonction (17) se réduira à l'unité et l'équation (12) deviendra une identité, quelque proche que soit le point (x', y') de (a_k, b_k); donc, on a à la discuter par la méthode des limites. En vertu de la propriété bien connue de la fonction adjointe de troisième espèce

$$(24) \qquad \mathfrak{P}_{x', x_p} = \mathfrak{P}_{x', \eta} - \mathfrak{P}_{x_p, \eta},$$

et de cette autre, exprimée par l'équation (en n'écrivant que les zéros arbitraires),

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{P}_{x_p, \eta}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi) = \\ &\quad = -\mathfrak{P}_{x_p, \eta}(\xi, y_\xi; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; z, y_z)\, \varphi_p(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi), \end{aligned} \right.$$

$\varphi_p(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi)$ désignant une fonction adjointe de première espèce ayant ses zéros arbitraires aux points $(\overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})$ et prenant une valeur $= 1$ au point (ξ, y_ξ), on aura, lorsque (x', y') est très rapproché de (a_k, b_k) et (x_p, y_p) de (ξ, y_ξ), le développement suivant pour la fonc-

Digitized by Google

tion $\mathfrak{P}_{x',\xi}$ de (12) :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{P}_{x',x_p}(a_k, b_k; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi \mid \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}}) = \\ &= -\frac{\dfrac{\partial \mathfrak{F}(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{a_k - x'} + \mathfrak{P}_1(a_k - x') \\ &\quad + \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{F}(x_p, y_p)}{\partial y_p}}{x_p - \xi}\, \varphi_p(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) + \mathfrak{P}_2(x_p - \xi); \end{aligned}\right.$$

en portant ce développement au lieu de la fonction dans l'équation (12), on trouvera, ayant égard à (13), que

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim \left(\overset{x'}{\underset{\xi}{\Pi}}_k - D_{a_k} \log \mathfrak{P}_{x',x_p}(a_p, b_p; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi \mid \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})\right)_{x'=a_k,\, y'=b_k} = \\ &= \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{F}(x_p, y_p)}{\partial y_p}}{x_p - \xi}\, \varphi_p(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) + \mathfrak{P}(x_p - \xi). \end{aligned}\right.$$

Comme $D_{a_k} \log \varphi(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; x_i, y_i \mid \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})$ est une quantité finie, nous aurons

$$(28)\qquad C_k + \mathfrak{I}(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}})_k = \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{F}(x_p, y_p)}{\partial y_p}}{x_p - \xi}\, \varphi_p(\overset{m-2}{a_p}, \overset{n-2}{b_p}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) + k_k,$$

k_k désignant les termes qui ne contiennent pas des puissances négatives de $(x_p - \xi)$. Donc, en portant cette expression dans l'équation (6), on trouvera, vu que

$$(29)\qquad dx_p = \frac{\partial \mathfrak{F}(x_p, y_p)}{\partial y_p} \sum_{k=1}^{p} \varphi_p(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})\, du_k,$$

l'équation

$$(30)\qquad \Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} \mid \xi) = \log(x_p - \xi) + l,$$

l ne contenant pas de puissances négatives de $x_p - \xi$, et par l'équation (7)

$$(31)\qquad \Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{\underset{x_0}{\overset{\xi}{I_h}}}}) = (x_p - \xi) e^{l},$$

d'où l'on voit qu'effectivement la fonction Θ devient égale à o, lorsque l'un des points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, par exemple (x_p, y_p), vient coïncider avec le point (ξ, y_ξ).

Digitized by Google

Ce n'est que pour abréger l'exposition que nous avons supposé qu'un seul point (x_p, y_p) tombe en (ξ, y_ξ); s'il y en avait λ de pareils, on aurait à remplacer dans l'équation (12) la fonction principale par la somme de λ expressions pareilles à (17), construites pour chacun de ces λ points, en lui donnant le rôle de (x_p, y_p).

Dans le second cas, la fonction $= \Theta$ pouvant être réduite à la forme (31), quels que soient les (ξ, y_ξ) et $(\overset{p-1}{\underset{1}{x_i}}, y_i)$, l'évanouissement de cette fonction aura lieu identiquement. C'est parce que, les $p - 1$ des $(\alpha_i, \overset{p}{\underset{1}{y}}\alpha_i)$ restant indéterminés comme les $(x_i, \overset{p}{\underset{1}{y}}_i)$, le dernier vient *toujours* tomber en (a_k, b_k).

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR

UNE EXTENSION DE LA SÉRIE DE TAYLOR,

PAR M. MITTAG-LEFFLER (STOCKHOLM).

L'expression limite

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{1}{\lambda!} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^{\lambda},$$

connue sous le nom de *série de Taylor*, possède la propriété fondamentale d'être uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur d'un certain cercle, soit C, mais de diverger pour chaque point en dehors du même cercle.

L'expression limite $\lim_{n=\infty} G_n(x \mid a)$

$$G_n(x \mid a) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^n} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} F^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n},$$

que je viens d'étudier dans des Mémoires récents, possède la propriété de converger uniformément pour chaque domaine à l'intérieur de l'étoile principale A, appartenant aux constantes $F^{(\mu)}(a)$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$, et de ne converger uniformément pour aucun continuum embrassant un sommet de A. Il est pourtant parfaitement possible que $\lim_{n=\infty} G_n(x \mid a)$ converge encore en dehors de A. Il y a cette différence essentielle entre l'expression $\lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{1}{\lambda!} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^{\lambda}$ et l'expression $\lim_{n=\infty} G_n(x \mid a)$, que le cercle C est toujours une étoile de convergence de l'expression

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{1}{\lambda!} F^{(\lambda)}(a)(x-a)^{\lambda},$$

Digitized by Google

mais qu'il n'est pas nécessaire que l'étoile A soit une étoile de convergence de l'expression $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n=\infty} G_n(x \mid a)$.

Le problème suivant se pose alors de soi-même. Remplacer $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n=\infty} G_n(x \mid a)$ par une autre expression limite qui possède l'étoile A comme étoile de convergence.

Ce problème peut être résolu de différentes manières.

Voici ma première solution :

$$S_n(x \mid a) = \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{m_1=\infty} \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{m_2=\infty} \cdots \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{m_n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=0}^{m_n} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{m_n} c_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} F^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}(a)(x-a)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$$

Les constantes $c_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$ sont des constantes numériques données dont

$$c_{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1!}; \qquad c_{\lambda_1\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda_1+\lambda_2}; \qquad c_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\lambda_3!}\left(\frac{1}{3}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3},$$

et qui deviennent des irrationalités algébriques pour $n > 3$. On voit que $S_n(x \mid a)$ pour $n = 1$ n'est pas autre chose que la série de Taylor.

L'expression $S_n(x \mid a)$ possède toujours pour toutes les valeurs de n une étoile de convergence de forme bien déterminée. Pour $n = 1$, cette étoile devient le cercle C. Elle s'approche indéfiniment de l'étoile A quand n augmente suffisamment.

L'expression limite

$$\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n=\infty} S_n(x \mid a)$$

possède l'étoile A comme étoile de convergence et l'on a en même temps

$$FA(x) = \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n=\infty} S_n(x \mid a).$$

Voici maintenant une seconde solution. Posons

$$S_n(x \mid a) = F(a) + \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n=\infty} \sum_{\lambda=1}^{n} \mathcal{G}_\lambda(x-a)$$

$$\mathcal{G}_\lambda(x-a) = \frac{h_{\lambda-1}^{(1)}(\beta)}{1!\,(\lambda-1)!} F^{(1)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right) + \frac{h_{\lambda-2}^{(2)}(\beta)}{2!\,(\lambda-2)!} F^{(2)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{h_1^{(\lambda-1)}(\beta)}{(\lambda-1)!\,1!} F^{(\lambda-1)}(a)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda!} F^{(\lambda)}(b)\left(\frac{x-a}{\omega}\right)^{\lambda}$$
$$\beta = 1 - \alpha$$

Digitized by Google

$\alpha =$ nombre positif qui n'est pas supérieur à un,

$$\omega = e^{\left[\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}\alpha)}{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha)} - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right]} = (\tfrac{1}{2}e)^2 e^{\frac{2}{\alpha}[+\alpha p(\alpha)]}$$

Les $h_\mu^{(m)}(\beta)$ sont des polynomes en β du degré μ dont les coefficients sont des nombres rationnels positifs donnés. Ces polynomes disparaissent pour $\beta = 0$.

L'expression $\mathbf{S}_\alpha(x \mid a)$ devient pour $\alpha = 1$ la série de Taylor. Elle possède une étoile de convergence parfaitement déterminée qui est pour $\alpha = 1$ le cercle C et qui s'approche de plus en plus de l'étoile A quand α s'approche de zéro. D'un autre côté l'expression limite

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{\alpha=0} \mathbf{S}_\alpha(x \mid a)$$

possède l'étoile A pour étoile de convergence.

On a donc, pour l'intérieur de l'étoile principale, l'égalité

$$\mathrm{FA}(x) = \mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} \mathrm{G}_n(x \mid a) = \mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} \mathbf{S}_n(x \mid a) = \mathop{\mathrm{Lim}}_{\alpha=0} \mathbf{S}_\alpha(x \mid a).$$

L'étoile A étant une étoile de convergence pour la seconde et la troisième de nos trois expressions limites, ne l'est pas nécessairement pour la première.

La première expression étant

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} \mathrm{G}_n(x \mid a) = \mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} \mathrm{F}^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$$

est une expression limite simple, la troisième étant

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{\alpha=0} \mathbf{S}_\alpha(x \mid a) = \mathrm{F}(a) + \mathop{\mathrm{Lim}}_{\alpha=0} \mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} \sum_{\lambda=1}^{n} \left[\frac{h_{\lambda-1}^{(1)}(\beta)}{1!\,(\lambda-1)!} \mathrm{F}^{(1)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{h_1^{(\lambda-1)}(\beta)}{(\lambda-1)!\,1!} \mathrm{F}^{(\lambda-1)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right)^{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda!} \mathrm{F}^{(\lambda)}(a) \left(\frac{x-a}{\omega}\right)^{\lambda} \right]$$

est une expression limite double, la seconde étant

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} \mathbf{S}_n(x \mid a)$$
$$= \mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} \mathop{\mathrm{Lim}}_{m_1=\infty} \mathop{\mathrm{Lim}}_{m_2=\infty} \ldots \mathop{\mathrm{Lim}}_{m_n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \ldots \sum_{\lambda_n=0}^{m_n} c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} \mathrm{F}^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}(a)(x-a)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$$

est d'une transcendance beaucoup plus élevée.

Digitized by Google

Ajoutons encore l'observation importante que voici. Il y a entre C et A une étoile intermédiaire $A^{(\alpha)}$ qui peut être amenée d'une manière continue de C à A en faisant varier α depuis 1 jusque vers zéro, et pour laquelle l'égalité

$$FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=1}^{n} \mathcal{G}_\lambda(x-a)$$

a lieu. Cette étoile est une étoile de convergence pour l'expression $\lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=0}^{n} \mathcal{G}_\lambda(x-a)$ qui est de son côté une expression limite simple.

Tous les théorèmes que je viens d'énoncer peuvent être étendus à des fonctions analytiques de plusieurs variables indépendantes. Cette extension peut se faire de deux manières très différentes. Dans la première, qui est pour ainsi dire la plus banale, l'ordre entre les variables indépendantes ne joue aucun rôle. Dans la seconde, au contraire, cet ordre a un rôle prépondérant.

Digitized by Google

REMARQUES RELATIVES

A LA

COMMUNICATION DE M. MITTAG-LEFFLER,

PAR M. ÉMILE BOREL (PARIS).

M. Borel demande la parole pour présenter quelques observations à l'occasion de la remarquable Communication de M. Mittag-Leffler.

Il rappelle d'abord comment, dès la publication de la belle découverte de l'éminent géomètre suédois, il a donné dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (1899) une démonstration extrêmement simple du premier théorème fondamental. Cette démonstration était basée sur l'emploi de l'intégrale de Cauchy et se rattachait immédiatement à un principe antérieurement développé par M. Borel dans ses mémoires sur les séries divergentes. On peut le résumer brièvement : l'intégrale de Cauchy donne l'expression de toute fonction analytique comme somme d'une infinité d'éléments simples de la forme $\frac{1}{z-x}$; il en résulte aisément que, pour démontrer le théorème de M. Mittag-Leffler pour une fonction quelconque, il suffit de le démontrer pour la fonction simple $\frac{1}{1-z}$; or, pour cette fonction simple, des propositions équivalentes (développements en séries de polynomes) résultent de recherches de MM. Runge, Hilbert et Painlevé.

Soit maintenant, au lieu d'une intégrale telle que celle de Cauchy, une série, somme d'une infinité dénombrable de fractions rationnelles; la même remarque subsiste, d'où la conséquence suivante déjà indiquée par M. Borel dans les *Annales de l'École Normale :* le théorème de M. Mittag-Leffler peut s'appliquer dans des cas où le prolongement analytique ne s'applique pas; il peut fournir un prolongement dans des cas où *il n'y a pas* de prolongement, au sens de Weierstrass. Il en résulte que l'étoile principale n'est pas nécessairement une étoile de convergence pour l'expression limite simple donnée primitivement par M. Mittag-Leffler.

Digitized by Google

Mais on peut aller plus loin et, en employant une méthode indiquée pour la première fois par M. Borel dans sa Thèse et reprise par lui dans ses premières *Leçons sur la théorie des fonctions*, on peut démontrer la proposition suivante : Étant donnée une expression limite simple quelconque, analogue à celle de M. Mittag-Leffler, c'est-à-dire caractérisée par des constantes numériques déterminées, et toujours convergente dans l'étoile A, *il existe des fonctions analytiques telles que l'expression limite simple correspondante n'admette pas l'étoile* A *comme étoile de convergence, c'est-à-dire converge aussi en dehors de* A.

Cette proposition a été démontrée par M. Borel dans son *Mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta mathematica*, t. XXIV), et aussi dans ses *Leçons sur les séries divergentes* (Paris, 1901).

Digitized by Google

NOUVEAUX SYSTÈMES ORTHOGONAUX

POUR LES

DÉRIVÉES DES FONCTIONS THÊTA

DE DEUX ARGUMENTS;

PAR M. E. JAHNKE (BERLIN).

On doit à M. Caspary (1) le théorème que les seize produits

$$f_{\alpha\beta} = \vartheta_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\vartheta_{\alpha\beta}(y_1, y_2)$$

forment les coefficients d'un système orthogonal dans l'arrangement suivant :

$$\begin{array}{cccc} f_0 & f_{01} & -f_{03} & -f_{24} \\ -f_2 & f_{12} & f_{23} & -f_{04} \\ f_4 & -f_{14} & f_{34} & -f_{02} \\ f_{13} & f_3 & f_1 & f_5, \end{array}$$

que j'appellerai *arrangement casparyien*. Ce système comprend toutes les relations *algébriques* entre les fonctions thêta de deux arguments.

En poursuivant les recherches de M. Caspary, j'ai trouvé (2) des systèmes orthogonaux comprenant un grand nombre de relations *différentielles* qui existent entre lesdites fonctions.

Dans ce qui suit, je vais énoncer trois théorèmes qui fournissent de nouveaux systèmes orthogonaux pour les dérivées des fonctions thêta de deux arguments et qui se déduisent eux-mêmes du système général établi dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. CXIX, p. 240 (3) :

I. Les $n^{\text{ièmes}}$ dérivées des produits

$$\vartheta_{\alpha\beta}(x_1 + a_1, x_2 + a_2)\vartheta_{\alpha\beta}(x_1 - a_1, x_2 - a_2),$$

(1) *Crelle's J.*, Bd 94, p. 77; 1881.
(2) *C. R.*, t. CXXV, p. 486-489; 1897.
(3) *Comparez* aussi *C. R.*, t. CXXVI, p. 1014; 1898.

Digitized by Google

où a_1, a_2 désignent des constantes, forment dans l'arrangement casparyien les seize coefficients d'un système orthogonal.

II. Les $n^{\text{ièmes}}$ dérivées des produits

$$\vartheta^2_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\, d^2 \log \vartheta_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$$

forment dans l'arrangement casparyien les seize coefficients d'un système orthogonal.

III. Les premières dérivées des dix fonctions thêta paires et des six fonctions thêta impaires forment, dans l'arrangement casparyien, les seize coefficients d'un système orthogonal. Ce système est le suivant :

$$\begin{array}{llll}
c_0\ \vartheta'_0\ (x_1, x_2) & c_{01}\vartheta'_{01}(x_1, x_2) & -c_{03}\vartheta'_{03}(x_1, x_2) & -c'_{24}\vartheta_{24}(x_1, x_2) \\
-c_2\ \vartheta'_2\ (x_1, x_2) & c_{12}\vartheta'_{12}(x_1, x_2) & c_{23}\vartheta'_{23}(x_1, x_2) & -c'_{04}\vartheta_{04}(x_1, x_2) \\
c_4\ \vartheta'_4\ (x_1, x_2) & -c_{14}\vartheta'_{14}(x_1, x_2) & c_{34}\vartheta'_{34}(x_1, x_2) & -c'_{02}\vartheta_{02}(x_1, x_2) \\
c'_{13}\vartheta_{13}(x_1, x_2) & c'_3\ \vartheta_3\ (x_1, x_2) & c'_1\ \vartheta_1\ (x_1, x_2) & c_5\ \vartheta'_5\ (x_1, x_2).
\end{array}$$

Ce troisième théorème est un cas spécial d'un théorème général qui permet de déduire de chaque système orthogonal de neuf coefficients un système orthogonal de seize coefficients.

Digitized by Google

SUR LES INTÉGRALES COMPLÈTES

DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE,

PAR M. JULES DRACH (CLERMONT-FERRAND).

Les équations dont il s'agit sont à une seule fonction inconnue et à deux variables indépendantes.

Les méthodes de Monge, d'Ampère et de M. Darboux épuisent, théoriquement, ce qu'on peut dire de général sur la recherche des solutions dépendant de fonctions arbitraires ou d'une infinité de constantes arbitraires.

Notre but est d'apporter une modeste contribution à l'étude des solutions qui ne dépendent que d'un nombre limité de constantes arbitraires, en particulier des solutions à trois et à cinq constantes. M. J. König, dans un Mémoire bien connu (*Mathematische Annalen,* t. XXIV), a ramené la détermination de ces dernières (*intégrales complètes*) à l'intégration d'une équation *linéaire* du second ordre à sept variables indépendantes et à des intégrations ultérieures de systèmes complets. Nous montrons qu'on peut remplacer l'équation de M. König (qui est déterminée) par une équation du second ordre (*non linéaire*) à sept variables, dont la forme peut varier et qui renferme *cinq* fonctions inconnues; de plus, on peut éviter toute intégration ultérieure. *Tout se ramène donc à trouver un système de cinq fonctions de sept variables liées par une relation du second ordre.* M. König n'a pas indiqué d'application de sa méthode; nous n'en avons pas donné non plus, et c'est uniquement parce qu'on sait fort peu de chose sur le sujet que nous avons jugé utile de publier ces pages.

1. Considérons un système d'équations aux différentielles totales

$$(1)\qquad \begin{cases} dx_1 = a_1\,dx_4 + b_1\,dx_5, \\ dx_2 = a_2\,dx_4 + b_2\,dx_5, \\ dx_3 = a_3\,dx_4 + b_3\,dx_5, \end{cases}$$

Digitized by Google

où les a et les b sont des fonctions des cinq variables x, et supposons qu'il admette trois combinaisons intégrables; il faut et il suffit pour cela que les équations linéaires

$$(2)\qquad \begin{cases} A(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_4} + a_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + a_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \\ B(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_5} + b_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + b_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + b_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

forment un système jacobien, c'est-à-dire que l'on ait identiquement

$$(3)\qquad A(b_1) = B(a_1), \qquad A(b_2) = B(a_2), \qquad A(b_3) = B(a_3).$$

Admettons maintenant, ce qui arrivera en général, que le couple (a_1, b_1) soit formé de deux fonctions *distinctes* des variables x_2 et x_3, de telle sorte que x_1, x_4, x_5, a_1, b_1 soient cinq fonctions *distinctes* des x_i; il sera possible de transformer le système (1) par l'introduction des nouvelles variables (a_1, b_1) et le système transformé

$$(4)\qquad \begin{cases} dx_1 = a_1\, dx_4 \qquad + b_1\, dx_5, \\ da_1 = A(a_1)\, dx_4 + B(a_1)\, dx_5, \\ db_1 = A(b_1)\, dx_4 + B(b_1)\, dx_5, \end{cases}$$

où $A(a_1)$, etc., sont exprimés avec les variables x_1, x_4, x_5, a_1, b_1, admettra toujours trois combinaisons intégrables.

Nous remarquerons qu'il suffit de poser

$$z = x_1, \qquad x = x_4, \qquad y = x_5, \qquad p = a_1, \qquad q = b_1,$$
$$r = A(a_1), \qquad s = A(b_1) = B(a_1), \qquad t = B(b_1)$$

pour donner au système (4) la forme connue

$$(5)\qquad \begin{cases} dz - p\, dx - q\, dy = 0, \\ dp - r\, dx - s\, dy = 0, \\ dq - s\, dx - t\, dy = 0, \end{cases}$$

où r, s, t sont trois fonctions de x, y, z, p, q satisfaisant aux conditions

$$(6)\qquad \frac{dr}{dy} = \frac{ds}{dx}, \qquad \frac{ds}{dy} = \frac{dt}{dx},$$

qui expriment que le système

$$(7)\qquad \begin{cases} X(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + p \dfrac{\partial f}{\partial z} + r \dfrac{\partial f}{\partial p} + s \dfrac{\partial f}{\partial q} = 0, \\ Y(f) = \dfrac{\partial f}{\partial y} + q \dfrac{\partial f}{\partial z} + s \dfrac{\partial f}{\partial p} + t \dfrac{\partial f}{\partial q} = 0 \end{cases}$$

est jacobien.

Digitized by Google

On sait qu'alors, L, M, N désignant trois solutions fonctionnellement distinctes du système (7), correspondant à trois combinaisons intégrables de (5), les équations

$$\begin{aligned} L(x, y, z, p, q) &= l, \\ M(x, y, z, p, q) &= m, \\ N(x, y, z, p, q) &= n \end{aligned}$$

sont compatibles, quelles que soient les constantes l, m, n, et déterminent une solution, dépendant de trois constantes, du système des équations

$$\begin{aligned} r &= A(a_1) = R(x, y, z, p, q), \\ s &= B(a_1) = A(b_1) = S(x, y, z, p, q), \\ t &= B(b_1) = T(x, y, z, p, q) \end{aligned}$$

et aussi de toute combinaison de ces dernières.

2. Les remarques précédentes montrent comment on passe d'un système d'équations à cinq variables

$$(5) \qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0, \end{cases}$$

possédant trois combinaisons intégrables, au système le plus général *de même forme* qui possède la même propriété.

Posons, en désignant par λ, μ deux variables auxiliaires

$$(8) \qquad \begin{cases} x = X(x', y', z', \lambda, \mu), \\ y = Y(x', y', z', \lambda, \mu), \\ z = Z(x', y', z', \lambda, \mu), \\ p = P(x', y', z', \lambda, \mu), \\ q = Q(x', y', z', \lambda, \mu), \end{cases}$$

les seconds membres représentant cinq fonctions distinctes de leurs arguments, de telle sorte que x', y', z', λ, μ s'expriment aussi avec x, y, z, p, q. Le système transformé du système (5) s'écrira

$$(9) \qquad \begin{cases} dZ - P\,dX - Q\,dY = 0, \\ dP - r\,dX - s\,dY = 0, \\ dQ - s\,dX - t\,dY = 0, \end{cases}$$

où l'on a remplacé dans r, s, t les variables x, y, z, p, q par leurs expressions (8); il renferme les différentielles dx', dy', dz', $d\lambda$, $d\mu$ et peut

Digitized by Google

être résolu par rapport aux trois dernières si l'on suppose, ce qui aura lieu en général, le déterminant de leurs coefficients différent de zéro. On obtient ainsi

$$(10)\qquad \begin{cases} dz' = p'\,dx' + q'\,dy', \\ d\lambda = l_1\,dx' + l_2\,dy', \\ d\mu = m_1\,dx' + m_2\,dy', \end{cases}$$

p', q', l_1, l_2, m_1, m_2 ne dépendant que des dérivées premières des fonctions X, Y, Z, P, Q, et l'on déduira immédiatement de là

$$(11)\qquad \begin{cases} dp' = r'\,dx' + s'\,dy', \\ dq' = s'\,dx' + t'\,dy', \end{cases}$$

en posant

$$(12)\qquad \begin{cases} r' = \mathrm{X}(p') \qquad\qquad = \dfrac{\partial p'}{\partial x'} + \dfrac{\partial p'}{\partial z'}\,p' + \dfrac{\partial p'}{\partial \lambda}\,l_1 + \dfrac{\partial p'}{\partial \mu}\,m_1, \\ s' = \mathrm{X}(q') = \mathrm{Y}(p') = \dfrac{\partial q'}{\partial x'} + \dfrac{\partial q'}{\partial z'}\,p' + \dfrac{\partial q'}{\partial \lambda}\,l_1 + \dfrac{\partial q'}{\partial \mu}\,m_1 = \ldots, \\ t' = \mathrm{Y}(q') \qquad\qquad = \dfrac{\partial q'}{\partial y'} + \dfrac{\partial q'}{\partial z'}\,q' + \dfrac{\partial q'}{\partial \lambda}\,l_2 + \dfrac{\partial q'}{\partial \mu}\,m_2. \end{cases}$$

Dans le cas où les fonctions p' et q' sont des fonctions distinctes des variables λ et μ, ce qui est évidemment le cas général, les équations (11) peuvent remplacer les deux dernières équations du système (10) et l'on retrouve ainsi un système *de même forme* que (5). Les expressions r', s', t' dépendent des dérivées secondes des fonctions X, Y, Z, P, Q et sont connues immédiatement lorsque les variables sont x', y', z', λ, μ; il suffit de remplacer λ et μ par leurs expressions déduites des valeurs de p' et q' pour les obtenir exprimées avec les variables x', y', z', p', q'.

3. Supposons maintenant qu'il s'agisse de *déterminer une solution, dépendant de trois constantes arbitraires, de l'équation quelconque du second ordre*

$$(13)\qquad \mathrm{F}(x', y', z', p', q', r', s', t') = 0;$$

partons d'un système de fonctions r, s, t des variables x, y, z, p, q pour lesquelles le système

$$(5)\qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0 \end{cases}$$

Digitized by Google

admet trois combinaisons intégrables, et faisons le changement de variables indiqué par les formules (8); nous avons vu qu'on peut calculer p' et q', puis r', s', t' de façon que le système transformé garde la forme

$$(14)\qquad \begin{cases} dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0, \\ dp' - r'\,dx' - s'\,dy' = 0, \\ dq' - s'\,dx' - t'\,dy' = 0. \end{cases}$$

Il suffira donc d'assujettir les éléments x', y', z', p', q', r', s', t' à vérifier la relation

$$(15)\qquad F(x', y', z', p, q', r', s', t') = 0,$$

pour obtenir un système de trois fonctions r' s', t' des variables x', y', z', p', q' pour lequel les équations (14) admettent trois combinaisons intégrables. La détermination de ces combinaisons revient à l'intégration d'un système complet et conduit à une solution de l'équation (13) renfermant trois constantes arbitraires.

Le problème proposé est ainsi ramené à la recherche d'une solution particulière de l'équation (15) dans laquelle p', q', r', s', t' sont des fonctions des cinq variables x', y', z', λ, μ, qui dépendent des dérivées premières et secondes des arbitraires X, Y, Z, P, Q. Cette équation (15) est donc une *équation à cinq variables* x', y', z', λ, μ *renfermant cinq fonctions inconnues* [1].

Remarquons, en outre, que la connaissance d'une solution particulière de l'équation (15) *et celle de la solution dépendant de trois constantes du système* (5) suffisent pour obtenir la solution cherchée de l'équation (13). Il suffira, en effet, de faire dans les équations

$$\begin{aligned} L(x, y, z, p, q) &= l, \\ M(x, y, z, p, q) &= m, \\ N(x, y, z, p, q) &= n, \end{aligned}$$

qui définissent les trois solutions distinctes de (5), le changement de variables

$$x = X(x', y', z', \lambda, \mu), \qquad \ldots, \qquad q = Q(x', y', z', \lambda, \mu),$$

et d'éliminer λ et μ entre les trois équations transformées, pour obtenir z' au moyen de x', y', l, m, n. On n'a donc pas besoin d'intégrer chaque

---

(1) Les expressions de r', s', t' sont d'ailleurs *linéaires* par rapport aux dérivées secondes de chacune des fonctions inconnues.

Digitized by Google

fois le système (14) ou le système équivalent écrit avec les variables x', y', z', λ, μ.

4. Des remarques analogues s'appliquent aussi à la recherche des *intégrales complètes* des équations du second ordre, qui dépendent de cinq constantes arbitraires.

Considérons une équation du second ordre, supposée résolue par rapport à r,

$$r = \mathrm{R}(x, y, z, p, q, s, t); \tag{16}$$

on sait que pour en obtenir une intégrale complète il faut lui adjoindre deux équations

$$\left\{\begin{aligned} u(x, y, z, p, q, s, t) &= \alpha, \\ v(x, y, z, p, q, s, t) &= \beta, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

telles que le système formé par les trois équations soit complètement intégrable quelles que soient les constantes α et β. Les conditions d'intégrabilité s'obtiennent en écrivant les égalités

$$\frac{dr}{dy} = \frac{ds}{dx}, \qquad \frac{ds}{dy} = \frac{dt}{dx}, \tag{18}$$

r, s, t étant définis implicitement par les trois équations considérées; elles sont du premier ordre et bilinéaires par rapport aux dérivées de u et v.

Tout système d'intégrales de ces deux équations (18) pour lequel le déterminant $\frac{\mathrm{D}(u, v)}{\mathrm{D}(s, t)}$ n'est pas nul permettra de déterminer s et t de façon que le système

$$\begin{aligned} dz - p\,dx - q\,dy &= 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy &= 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy &= 0 \end{aligned}$$

possède trois combinaisons intégrables; l'intégration introduira trois nouvelles constantes l, m, n et l'on obtiendra ainsi une *intégrale complète*.

La détermination de u et v a été étudiée, en particulier, par M. J. König (*Mathematische Annalen*, t. XXIV, p. 465); si l'on élimine v [en résolvant les deux équations (18) par rapport à $\frac{dv}{dx}$ et $\frac{dv}{dy}$, puis annulant le crochet de Jacobi, pour exprimer que le système est complet], on obtient

Digitized by Google

pour déterminer *u une équation du second ordre à sept variables* x, y, z, p, q, s, t, *linéaire par rapport aux dérivées du second ordre :*

$$A = 0. \tag{19}$$

Bien entendu, le cas où les équations (18) se réduisent algébriquement à une seule est écarté, la méthode d'Ampère étant alors applicable (*cf.* J. König, *loc. cit.*, p. 481, § IV).

Réciproquement, si u satisfait à l'équation (19), les deux équations $r = R$, $u = \alpha$ possèdent en commun une intégrale dépendant de quatre constantes arbitraires; la détermination de cette intégrale exige encore des intégrations : celle du système complet (18), ou du moins la détermination d'une solution, et l'intégration complète du système aux différentielles totales, qui admet alors trois combinaisons intégrables.

Il suffit de se reporter aux résultats obtenus dans le paragraphe précédent pour reconnaître que la connaissance de trois fonctions r, s, t de x, y, z, p, q et de deux variables α et β pour lesquelles le système

$$\left\{\begin{aligned} dz - p\,dx - q\,dy &= 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy &= 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy &= 0 \end{aligned}\right. \tag{5}$$

possède trois combinaisons intégrables, ramène la détermination d'une solution complète de l'équation

$$r = R(x, y, z, p, q, s, t) \tag{16}$$

à celle d'une solution particulière de l'équation à sept variables

$$r' = R(x', y', z', p', q', s', t'). \tag{20}$$

Cette dernière ne renfermera d'ailleurs, avec les cinq fonctions inconnues X, Y, Z, P, Q des variables x', y', z', λ, μ, α et β, que leurs dérivées secondes par rapport aux cinq variables x', y', z', λ, μ; les expressions de r', s', t' sont *linéaires* par rapport aux dérivées secondes de chacune des inconnues.

Ajoutons que si l'on connaît, pour le choix des fonctions r, s, t de $x, y, z, p, q, \alpha, \beta$ d'où l'on est parti, les trois solutions distinctes du système aux différentielles totales

$$\left\{\begin{aligned} dz - p\,dx - q\,dy &= 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy &= 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy &= 0, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Digitized by Google

aucune intégration n'est nécessaire pour trouver l'*intégrale complète* de (16) quand on connaît une solution particulière de l'équation (20). Il suffira de faire dans les expressions de z, p, q, au moyen des variables x, y et des constantes α, β, l, m, n, le changement de variables

$$x = X(x', y', z', \lambda, \mu, \alpha, \beta), \quad \ldots, \quad q = Q(x', y', z', \lambda, \mu, \alpha, \beta),$$

et d'éliminer λ, μ entre les trois équations obtenues.

Ces remarques sont actuellement sans portée pratique; nous n'avons aucune idée du degré de difficulté que présentent l'intégration de l'équation (19) à sept variables ou celle de l'équation analogue

$$r' = R(x', y', z', p', q', s', t'). \tag{20}$$

Il nous a cependant paru utile de montrer qu'on peut remplacer l'équation (19), qui est entièrement déterminée, par une équation susceptible de prendre des formes très différentes, puisqu'elle contient, outre les fonctions r, s, t de X, Y, Z, P, Q, α, β, assujetties à la seule condition de rendre le système (5) complètement intégrable, quatre fonctions de x', y', z', λ, μ, α, β, que l'on peut choisir arbitrairement. Nous avons vu de plus que la détermination d'une solution particulière de (20) doit être regardée en fait comme équivalente à celle d'une intégrale complète de l'équation

$$r = R(x, y, z, p, q, s, t),$$

puisqu'en choisissant convenablement les trois fonctions r, s, t de $x, y, z, p, q, \alpha, \beta$, aucune intégration ne sera plus nécessaire pour obtenir cette intégrale complète.

5. Nous n'insisterons pas ici sur la signification géométrique des transformations en x, y, z, p, q que nous venons de considérer, transformations qui changent manifestement des familles de surfaces à trois ou cinq paramètres en familles analogues, et sont *de contact* pour l'ensemble des éléments ainsi définis.

Bornons-nous à faire observer que la remarque fondamentale d'où nous sommes parti, relative à la transformation d'un système jacobien de n équations à $n + q$ inconnues en un système de même forme, est susceptible d'applications variées. Signalons pour l'équation du second ordre

$$r = R(x, y, z, p, q, s, t)$$

la généralisation qui se présente quand on adjoint à l'équation deux

Digitized by Google

autres relations :

$$u\left(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x\, \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = \alpha,$$
$$v\left(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x\, \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = \beta,$$

où ne figurent que deux dérivées d'ordre n (les autres s'exprimant avec celles-là) de façon à former un système complètement intégrable. M. König (*loc. cit.*) a montré que les conditions d'intégrabilité

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^2\, \partial y^{n-2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^n z}{\partial x\, \partial y^{n-1}}\right), \qquad \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial^n z}{\partial x\, \partial y^{n-1}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right)$$

conduisent encore, dans le cas général, à une seule équation du second ordre pour déterminer u, équation à $2n + 3$ variables. La détermination d'une solution de cette équation, jointe à des intégrations de systèmes complets, conduit à une *intégrale complète* renfermant $2n + 1$ constantes arbitraires. Nous avons, avec la théorie indiquée plus haut, le moyen de remplacer cette équation *déterminée* à $2n + 3$ variables par une autre équation à $2n + 3$ variables *renfermant* $2n + 1$ *fonctions inconnues* et de supprimer les intégrations ultérieures de systèmes complets.

Rappelons, en terminant, que l'étude du cas où les deux conditions d'intégrabilité se réduisent algébriquement à une seule a permis à M. König de retrouver la méthode de M. Darboux; il n'est donc pas nécessairement sans intérêt d'étudier la détermination des solutions d'une équation du second ordre qui ne dépendent que d'un nombre fini de constantes arbitraires.

Digitized by Google

Digitized by Google

SECTION III. — GÉOMÉTRIE.

SUR LES

TRANSFORMATIONS DE CONTACT

ENTRE LES

LIGNES DROITES ET LES SPHÈRES,

PAR M. E.-O. LOVETT, à Princeton (New-Jersey).

Une des plus belles découvertes de la Géométrie moderne est la transformation de contact, connue sous le nom de *transformation de Lie*, qui établit une liaison entre les lignes droites et les sphères, c'est-à-dire entre les éléments les plus essentiels de l'espace ordinaire. Proposons-nous de trouver toutes les transformations de contact de l'espace ordinaire qui changent les lignes droites en des sphères. Dans le cas de trois variables x, y, z il y aura trois classes de transformations de contact, suivant qu'on établit une, deux ou trois relations entre x, y, z, X, Y, Z. Nous sommes donc conduits à déterminer les formes de une, deux et trois équations directrices qui sont capables de représenter droite-en-sphère transformations de contact.

1. Supposons qu'on parte d'une seule relation entre x, y, z, X, Y, Z :

$$\Phi(x, y, z, X, Y, Z) = 0. \tag{1}$$

La droite

$$x = az + b, \qquad y = cz + d \tag{2}$$

sera transformée dans la surface donnée par l'équation

$$\Psi(X, Y, Z, a, b, c, d) = 0, \tag{3}$$

Digitized by Google

que l'on obtient en éliminant z au moyen des équations

$$(4) \qquad \Phi(az+b,\ cz+d,\ z,\ X,\ Y,\ Z)=0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=0.$$

Pour que la transformation soit univoque, il est clair que le degré de la fonction Φ par rapport à la variable z doit être égal à deux au plus; c'est-à-dire que la fonction Φ doit être de la forme

$$(5) \quad \Psi_1 x^2+\Psi_2 y^2+\Psi_3 z^2+\Psi_4 yz+\Psi_5 zx+\Psi_6 xy+\Psi_7 x+\Psi_8 y+\Psi_9 z+\Psi_{10}=0,$$

où les Ψ_i sont des fonctions des variables X, Y, Z. Ainsi, en posant

$$(6) \quad \begin{cases} P\equiv a^2\Psi_1+c^2\Psi_2+\Psi_3+c\Psi_4+a\Psi_5+ac\Psi_6, \\ Q\equiv 2ab\Psi_1+2cd\Psi_2+d\Psi_4+b\Psi_5+(ad+bc)\Psi_6+a\Psi_7+c\Psi_8+\Psi_9, \\ R\equiv b^2\Psi_1+d^2\Psi_2+bd\Psi_6+b\Psi_7+d\Psi_8+\Psi_{10}, \end{cases}$$

la transformée de la droite (2) est la surface

$$Q^2-4PR=0$$

ou

$$(7) \quad \begin{cases} d^2\Psi_4^2+b^2\Psi_5^2+(ad-bc)^2\Psi_6^2+a^2\Psi_7^2+c^2\Psi_8^2+\Psi_9^2, \\ \quad -4\Psi_1[(ad-bc)^2\Psi_2+b^2\Psi_3-b(ad-bc)\Psi_4+a(ad-bc)\Psi_8-ad\Psi_9+a^2\Psi_{10}] \\ \quad -4\Psi_2[d^2\Psi_3+d(ad-bc)\Psi_5-c(ad-bc)\Psi_7-cd\Psi_9+c^2\Psi_{10}] \\ \quad -4\Psi_3(bd\Psi_6+b\Psi_7+d\Psi_8+\Psi_{10}) \\ \quad +2\Psi_4[bd\Psi_5+d(ad-bc)\Psi_6+(ad-2bc)\Psi_7-cd\Psi_8+d\Psi_9-c\Psi_{10}] \\ \quad -2\Psi_5[b(ad-bc)\Psi_6+ab\Psi_7+(2ad-bc)\Psi_8-b\Psi_9+2a\Psi_{10}] \\ \quad +2\Psi_6[a(ad-bc)\Psi_7+c(ad-bc)\Psi_8+(ad+bc)\Psi_9-2ac\Psi_{10}] \\ \quad +2\Psi_7(ac\Psi_8+a\Psi_9) \\ \quad +2c\Psi_8\Psi_9=0. \end{cases}$$

Pour que cette surface (7) soit une quadrique pour toutes les valeurs de a, b, c, d, il faut que les fonctions Ψ_i aient la forme

$$(8) \qquad \Psi_i\equiv l_i X+m_i Y+n_i Z+\mu_i, \qquad i=1,2,\ldots,10,$$

où les l_i, m_i, n_i, μ_i sont des constantes.

Si l'on veut que cette quadrique soit une sphère pour toutes les valeurs de a, b, c, d, il est nécessaire que les fonctions

$$\Psi_4,\ \Psi_5,\ \Psi_6,\ \Psi_7,\ \Psi_8,\ \Psi_9$$

se réduisent à des constantes absolues. Donc, en introduisant les hypothèses suivantes

$$(9) \qquad \Psi_4=\Psi_5=\Psi_6=\Psi_7=\Psi_8=\Psi_9=0,$$

Digitized by Google

qui n'imposent aucune restriction, l'équation de la quadrique devient

$$(10)\quad (ad-bc)^2\Psi_1\Psi_2+d^2\Psi_2\Psi_3+b^2\Psi_3\Psi_1+a^2\Psi_1\Psi_{10}+c^2\Psi_2\Psi_{10}+\Psi_3\Psi_{10}=0.$$

Pour que cette surface soit une sphère il faut et il suffit qu'on ait les relations suivantes :

$$(11)\qquad \mathrm{S}\,l_1l_2=\mathrm{S}\,l_2l_3=\mathrm{S}\,l_3l_1=\mathrm{S}\,l_1l_{10}=\mathrm{S}\,l_2l_{10}=\mathrm{S}\,l_3l_{10},$$

$$(12)\quad l_1m_2-l_2m_1=l_1m_3-l_3m_1=\ldots=l_1n_2-l_2n_1=\ldots=m_1n_{10}-m_{10}n_1=0.$$

Les équations (12) sont équivalentes aux relations

$$l_1:l_2:l_3:l_{10}=m_1:m_2:m_3:m_{10}=n_1:n_2:n_3:n_{10};$$

par conséquent on a

$$\Phi_1\equiv\Psi_1-\mu_1=\alpha\mathrm{X}+\beta\mathrm{Y}+\gamma\mathrm{Z},\qquad \Phi_i\equiv\Psi_i-\mu_i=k_i\Phi_1,\qquad i=2,3,10;$$

et, en vertu des équations (11),

$$k_2=k_3=k_{10}=1;$$

c'est-à-dire

$$(13)\qquad \Psi_i=\alpha\mathrm{X}+\beta\mathrm{Y}+\gamma\mathrm{Z}+\mu_i,\qquad i=1,2,3,10.$$

Ainsi, la forme de la fonction directrice devient

$$(14)\quad \Phi\equiv(\alpha\mathrm{X}+\beta\mathrm{Y}+\gamma\mathrm{Z})(x^2+y^2+z^2+1)+\mu_1x^2+\mu_2y^2+\mu_3z^2+\mu_4=0.$$

Il faudra adjoindre à cette équation, pour déterminer X, Y, Z, P, Q, les équations suivantes :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+p\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}+q\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{X}}+\mathrm{P}\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{Z}}=0,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{Y}}+\mathrm{Q}\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{Z}}=0;$$

donc on trouve la forme explicite de la droite-en-sphère transformation de contact au moyen de la résolution par rapport aux X, Y, Z, P, Q du système

$$(x+zp)(\alpha\mathrm{X}+\beta\mathrm{Y}+\gamma\mathrm{Z})+\mu_1x+\mu_3p=0,$$
$$(y+zq)(\alpha\mathrm{X}+\beta\mathrm{Y}+\gamma\mathrm{Z})+\mu_2y+\mu_3q=0,$$
$$(15)\quad (x^2+y^2+z^2+1)(\alpha\mathrm{X}+\beta\mathrm{Y}+\gamma\mathrm{Z})+\mu_1x^2+\mu_2y^2+\mu_3z^2+\mu_4=0,$$
$$\gamma\mathrm{P}+\alpha=0,\qquad \gamma\mathrm{Q}+\beta=0.$$

Mais il n'est pas possible de résoudre ce système par rapport aux X, Y, Z, et ainsi, la fonction Φ (14) n'est pas capable de définir une transformation de contact. On conclut de là qu'il n'y a point de transformations

Digitized by Google

de contact univoques déterminées par une équation directrice, qui changent les lignes droites en des sphères.

On remarque, en passant, que toutes les ∞^{∞} transformations de contact définies par une seule équation de la forme

$$(16)\qquad \rho_1(x,y,z)X+\rho_2(x,y,z)Y+\rho_3(x,y,z)Z-\rho_4(x,y,z)=0$$

changent les lignes droites en des surfaces développables, et que les seules transformations de contact définies par une équation qui transforment les lignes droites en des lignes droites sont les ∞^{15} transformations dualistiques déterminées par l'équation bilinéaire

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l}(l_1X+m_1Y+n_1Z+\mu_1)x+(l_2X+m_2Y+n_2Z+\mu_2)y\\ \quad+(l_3X+m_3Y+n_3Z+\mu_3)z+l_4X+m_4Y+n_4Z+\mu_4=0.\end{array}\right.$$

Les transformations (16) sont équivalentes aux transformations ponctuelles

$$(18)\qquad x_1=\frac{\rho_1(x,y,z)}{\rho_4(x,y,z)},\qquad y_1=\frac{\rho_2(x,y,z)}{\rho_4(x,y,z)},\qquad z_1=\frac{\rho_3(x,y,z)}{\rho_4(x,y,z)},$$

suivies de la transformation par polaires réciproques par rapport à la sphère

$$X^2+Y^2+Z^2+1=0$$

déterminée par l'équation directrice

$$(19)\qquad Xx_1+Yy_1+Zz_1+1=0.$$

Dans le cas des transformations (17), les transformations (18) sont des transformations homographiques

$$(20)\qquad X_1=\frac{l_1x+m_1y+n_1z+\mu_1}{l_4x+m_4y+n_4z+\mu_4},\qquad \ldots.$$

2. Supposons maintenant qu'il existe deux relations entre x, y, z, X, Y, Z,

$$(21)\qquad \Phi_1(x,y,z,X,Y,Z)=0,\qquad \Phi_2(x,y,z,X,Y,Z)=0.$$

La transformation déterminée par ces deux équations directrices change la ligne droite

$$(22)\qquad y+kx+m=0,\qquad z+lx+n=0$$

en la surface donnée par l'équation

$$(23)\qquad \Psi(X,Y,Z,k,l,m,n)=0$$

Digitized by Google

que l'on obtient en éliminant x, y, z au moyen des quatre équations (21) et (22).

Pour que la ligne droite soit transformée dans une surface unique il faut que l'une des équations (21) soit linéaire par rapport aux variables x, y, z; pour que la transformée soit une quadrique il est nécessaire que l'autre équation soit linéaire dans x, y, z, et que les deux équations soient linéaires par rapport aux variables X, Y, Z.

Considérons donc les ∞^{30} transformations qui sont déterminées par deux équations bilinéaires

$$(24)\qquad x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3 + \varphi_4 = 0, \qquad x\varphi_5 + y\varphi_6 + z\varphi_7 + \varphi_8 = 0,$$

ou

$$(25)\qquad \varphi_i \equiv a_i X + b_i Y + c_i Z + d_i.$$

La transformée de la ligne droite (22) sera la surface du second degré

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_6 & \varphi_7 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_4 \\ \varphi_6 & \varphi_8 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_1 & \varphi_8 \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_5 & \varphi_6 \end{vmatrix} - n \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ \varphi_5 & \varphi_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_5 & \varphi_8 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette quadrique peut se réduire à une sphère, pour toutes les valeurs de k, l, m, n, dans les deux cas suivants :

1° Quand un déterminant quelconque de la matrice

$$(27)\qquad \left\| \begin{matrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ \psi_5 & \psi_6 & \psi_7 & \psi_8 \end{matrix} \right\| \qquad \psi_i \equiv \varphi_i - d_i$$

se réduit à la forme

$$(28)\qquad \text{const.}\,(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

et les fonctions φ_i correspondant aux fonctions ψ_i restant dans la matrice se réduisent à des constantes; ou :

2° Quand tous les six déterminants de la matrice (27) sont de la forme (28).

Dans le premier cas, nous trouvons six familles de ∞^{13} transformations définies par deux équations bilinéaires de la forme

$$(29)\qquad \begin{cases} \omega_1 \equiv (a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1)x + d_2 y + d_3 z + a_4 X + b_4 Y + c_4 Z + d_4 = 0, \\ \omega_2 \equiv (a_5 X + b_5 Y + c_5 Z + d_5)x + d_6 y + d_7 z + a_8 X + b_8 Y + c_8 Z + d_8 = 0, \end{cases}$$

où les constantes sont assujetties aux conditions

$$(30)\qquad \begin{cases} a_1 a_8 - a_4 a_5 - b_1 b_5 - b_4 b_5 = c_1 c_8 - c_4 c_5, \\ a_1 b_8 + a_8 b_1 - a_4 b_5 - a_5 b_4 = 0, \\ b_1 c_8 + b_8 c_1 - b_4 c_5 - b_5 c_4 = 0, \\ c_1 a_8 + c_8 a_1 - c_4 a_5 - c_5 a_4 = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

En formant les équations

$$(31)\quad \begin{cases} \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x} + p\left(\dfrac{\partial\omega_1}{\partial z} + \lambda\dfrac{\partial\omega_2}{\partial z}\right) = 0, \qquad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial y} + \dfrac{\partial\omega_2}{\partial y} + q\left(\dfrac{\partial\omega_1}{\partial z} + \lambda\dfrac{\partial\omega_2}{\partial z}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial X} + \lambda\dfrac{\partial\omega_2}{\partial X} + P\left(\dfrac{\partial\omega_1}{\partial Z} + \lambda\dfrac{\partial\omega_2}{\partial Z}\right) = 0, \qquad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial Y} + \lambda\dfrac{\partial\omega_2}{\partial Y} + Q\left(\dfrac{\partial\omega_1}{\partial Z} + \lambda\dfrac{\partial\omega_2}{\partial Z}\right) = 0, \end{cases}$$

nous vérifions facilement que les transformations définies par les équations (29) et (30) sont des transformations de contact.

Les droites se transforment en des points, si

$$(32)\qquad d_1 : d_2 : d_3 : d_4 = d_5 : d_6 : d_7 : d_8$$

et en des plans si

$$: b_4 c_4 = a_5 : b_5 : c_5 : a_8 : b_8 : c_8.$$

Nous voyons ensuite que, en particularisant les constantes de la manière suivante

$$(34)\quad \begin{cases} a_1 = a_8 = b_1 = b_8 = c_4 = c_5 = d_1 = d_2 = d_5 = d_7 = d_8 = 0 \\ a_4 = a_5 = c_1 = -c_8 = d_3 = d_6 = 1, \qquad b_4 = -b_5 = \sqrt{-1}, \end{cases}$$

nous avons la correspondance célèbre étudiée par Lie

$$(35)\qquad Zx + z + X + iY = 0, \qquad (X - iY)x + y - Z = 0.$$

Enfin les valeurs

$$(36)\quad \begin{cases} a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_7 = b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = b_7 \\ \quad = c_1 = c_4 = c_5 = c_6 = c_8 = d_1 = d_2 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = 0, \\ a_3 = a_6 = -a_8 = -c_2 = c_7 = d_4 = 1, \qquad b_3 = -b_6 = i \end{cases}$$

donnent la transformation de contact définie par les équations

$$(37)\quad \begin{cases} Zy - (X + iY)z - 1 = 0, \\ x - (X - iY)y - Zz = 0, \end{cases}$$

qui est équivalente à une transformation par polaires réciproques déterminée par l'équation directrice (9) suivie de la transformation de Lie (35).

Le deuxième cas, savoir quand tous les six déterminants de la matrice (27) sont de la forme (28), bien que ses conditions soient plus nombreuses, donne des familles plus remarquables et plus étendues de transformations de contact. On signale deux familles de ∞^{15} transformations.

Digitized by Google

En effet, les équations

$$(38)\quad \begin{cases} a_i a_\sigma - a_\rho a_j = b_i b_\sigma - b_\rho b_j = c_i c_\sigma - c_\rho c_j, \\ a_i b_\sigma + a_\sigma b_i - a_\rho b_j - a_j b_\rho = 0, \\ b_i c_\sigma + b_\sigma c_i - b_\rho c_j - b_j c_\rho = 0, \\ c_i a_\sigma + c_\rho a_i - c_\rho a_j - c_j a_\rho = 0, \end{cases}$$

qui sont nécessaires et suffisantes pour que le déterminant

$$\psi_i \psi_\sigma - \psi_\sigma \psi_j$$

soit changé dans la forme (28), possèdent les solutions symétriques

$$(39)\quad \begin{cases} b_i = a_i\sqrt{-1}, & b_j = a_j\sqrt{-1}, & b_\rho = -a_\rho\sqrt{-1}, & b_\sigma = -a_\sigma\sqrt{-1}, \\ c_i = \pm a_\rho, & c_j = \pm a_\sigma, & c_\sigma = \mp a_i, & c_\sigma = \mp a_j; \end{cases}$$

ainsi on trouve que les deux systèmes des deux équations bilinéaires

$$(40)\quad \begin{cases} \varphi_j \equiv a_j X + i a_j Y + c_j Z + d_j = 0, \\ \varphi_{j+4} \equiv c_j X - i c_j Y - a_j Z + d_{j+4} = 0, \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$(41)\quad \begin{cases} \varphi_j \equiv a_j X + i a_j Y + c_j Z + d_j = 0, \\ \varphi_{j+4} \equiv c_j X - i c_j Y + a_j Z + d_{j+4} = 0, \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3, 4,$$

définissent deux familles de ∞^{15} transformations qui changent les lignes droites en des sphères.

Maintenant on combine la transformation de Lie

$$(42)\qquad Z x_1 + z_1 + X + iY = 0, \qquad (X - iY) x_1 + y_1 - Z = 0,$$

avec toutes les transformations du groupe projectif général

$$(43)\quad \begin{cases} \rho x_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1, & \rho z_1 = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3, \\ \rho y_1 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2, & \rho = \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4; \end{cases}$$

les ∞^{15} transformations de contact résultantes sont droite-sphère transformations déterminées par les deux équations

$$(44)\quad \begin{cases} (\alpha_4 X + i\alpha_4 Y + \alpha_1 Z + \alpha_3) x + (\beta_4 X + i\beta_4 Y + \beta_1 Z + \beta_3) y + \ldots = 0, \\ (\alpha_1 X - i\alpha_1 Y - \alpha_4 Z + \alpha_2) x + (\beta_1 X - i\beta_1 Y - \beta_4 Z + \beta_2) y + \ldots = 0, \end{cases}$$

qui sont de la forme (40). Donc, les transformations (40) sont équivalentes aux produits des transformations du groupe projectif général par la transformation de Lie.

On combine encore la transformation de Lie avec toutes les droite-droite transformations définies par l'équation

$$(45)\qquad (\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z + \delta_1) x + \ldots + \alpha_4 X + \beta_4 Y + \gamma_4 Z + \delta_4 = 0;$$

Digitized by Google

les ∞^{15} droite-sphère transformations de contact résultantes sont déterminées par les deux équations

$$(46)\quad \begin{cases} (\alpha_1 X - i\alpha_1 Y + \alpha_4 Z + \alpha_2)x + (\beta_1 X - i\beta_1 Y + \beta_4 Z + \beta_2)y + \ldots = 0, \\ (\alpha_4 X + i\alpha_4 Y - \alpha_1 Z + \alpha_3)x + (\beta_4 X + i\beta_4 Y - \beta_1 Z + \beta_3)y + \ldots = 0, \end{cases}$$

de la forme (41). Donc les droite-sphère transformations (41) sont équivalentes aux transformations dualistiques suivies de la transformation de Lie.

Donc en employant le théorème de M. Darboux, que l'on exprime en disant que la définition des systèmes conjugués sur une surface est projective et dualistique, on voit que les ∞^{15} droite-sphère transformations de contact (40) et (41) changent les lignes asymptotiques en des lignes de courbure.

3. Le cas de trois relations entre x, y, z, X, Y, Z conduit aux transformations ponctuelles; donc, il n'y a pas de transformations de contact déterminées par trois équations directrices qui changent les droites en des sphères.

Digitized by Google

SUR LES

CORPS RÉGULIERS ET SEMI-RÉGULIERS,

PAR M. F.-J. VAES, à Rotterdam.

1. La Communication suivante ne peut être qu'un résumé très succinct de quelques études sur les corps réguliers et semi-réguliers.

La seule propriété, qui sera mentionnée des corps réguliers, sera : *que ces corps peuvent être tous inscrits dans un cube*, et peuvent donc être obtenus facilement d'un seul morceau de bois ou de métal.

La propriété, que l'octaèdre et le tétraèdre peuvent être placés dans un cube, était bien connue. L'auteur démontra que le dodécaèdre et l'icosaèdre jouissent de la même propriété.

Cette propriété mène à des conclusions remarquables concernant ces deux corps et donne une extrême simplification dans les calculs que l'on fait sur ces corps et sur les quatre corps réguliers étoilés (qui, à leur tour, peuvent être déduits du dodécaèdre et de l'icosaèdre) : simplification qui est d'ailleurs soutenue par une notation spéciale.

Des détails se trouvent dans une brochure de l'auteur : *Het onderling verband der regelmatige lichamen en twee der half-regelmatige* (c'est-à-dire *Le rapport entre les corps réguliers et deux des corps semi-réguliers,* Leyde; 1899, chez Sythoff).

2. Considérons plus spécialement les corps semi-réguliers.

On verra dans ce qui suit que le dodécaèdre et l'icosaèdre, d'une part, et le cube et l'octaèdre, de l'autre, donnent naissance à une série de corps semi-réguliers de la première ou de la seconde espèce.

La série déduite du dodécaèdre et de l'icosaèdre sera spécialement examinée, puisque l'autre série, déduite du cube et de l'octaèdre, peut alors facilement être construite par le lecteur qui s'y intéressera.

Les corps semi-réguliers ont été classifiés par Catalan (Mémoire sur la théorie des polyèdres, *Journal de l'École Polytechnique,* t. XXIV, p. 1-26; 1860).

Digitized by Google

Seulement, dans cette classification, on ne voit pas le rapport entre les différents corps, et l'auteur s'est donc posé la question de dériver les corps semi-réguliers l'un de l'autre ou des corps réguliers, et de trouver des symboles simples pour chacun d'eux, qui immédiatement montreraient leur rapport.

3. Si par les arêtes d'un dodécaèdre on fait passer des plans faisant des angles égaux avec les faces adjacentes du corps, ces trente plans limiteront un corps, dont les faces sont des losanges (le triacontoèdre de Catalan).

En opérant de la même manière sur l'icosaèdre, on obtient le même corps.

Les diagonales d'une des faces de ce corps sont donc des arêtes d'un dodécaèdre et d'un icosaèdre, placés de manière que deux arêtes s'intersectent perpendiculairement en leur milieu [1].

4. Dans la position mentionnée du dodécaèdre et de l'icosaèdre, ces corps ont un autre corps en commun, limité par 12 pentagones et 20 triangles réguliers (le triacontadoèdre à faces triangulaires et pentagonales de Catalan).

5. Si l'on agrandit le dodécaèdre, de sorte que sa position ne change pas et que son centre reste fixe, il tronquera l'icosaèdre, et l'on peut pousser l'agrandissement jusqu'à ce qu'on ait obtenu un corps à 12 pentagones et 20 hexagones réguliers (le triacontadoèdre à faces pentagonales et hexagonales de Catalan).

6. Quand au lieu du dodécaèdre on fait grandir l'icosaèdre, le dodécaèdre sera tronqué, et l'on peut obtenir un corps à 12 décagones et 20 triangles réguliers (le triacontadoèdre à faces triangulaires et décagonales de Catalan).

7. Voici donc déjà quatre corps semi-réguliers; et il s'agit maintenant de trouver des symboles simples pour les distinguer l'un de l'autre. Or, nommant le dodécaèdre simplement 12, et l'icosaèdre 20, le corps, qui leur est commun, signalé au n° 4, peut être représenté par le symbole

---

(1) Puisque ces deux corps peuvent être inscrits dans le même cube, le triacontoèdre peut être taillé immédiatement dans un cube.

Digitized by Google

$\frac{12}{2}, \frac{20}{2}$, où les dénominateurs 2 indiquent que les arêtes du dodécaèdre et celles de l'icosaèdre s'intersectent en leur milieu.

Le triacontoèdre, obtenu au n° 3, sera représenté par $\left(\frac{12}{2}, \frac{20}{2}\right)$, où les crochets indiquent que ce corps enveloppe le dodécaèdre et l'icosaèdre, placés dans la position mentionnée précédemment ou, plus simplement, on peut représenter ce corps par le symbole 30.

L'icosaèdre tronqué (du n° 5) sera symbolisé par $12, \frac{20}{3}$, puisque les arêtes de l'icosaèdre sont coupées au tiers de leur longueur.

Le dodécaèdre tronqué (du n° 6) aura le symbole $\frac{12}{n}, 20$, puisque les arêtes du dodécaèdre sont coupées à $\frac{1}{n}$ de leur longueur; le nombre n n'étant pas entier, mais pouvant être calculé d'une manière simple.

8. Les deux corps, représentés par $\frac{12}{2}, \frac{20}{2}$ et par $\left(\frac{12}{2}, \frac{20}{2}\right)$, ou 30, donnent à leur tour naissance à d'autres corps semi-réguliers.

Considérant ces corps dans leur position de corps inscrits et circonscrits au dodécaèdre et à l'icosaèdre (n°s 4 et 3), on peut faire grandir le premier (sans en changer la position, ou la position de son centre), jusqu'à ce que ses arêtes intersectent celles de l'autre.

Dans cette position, les deux corps peuvent être enveloppés par un corps à 60 faces deltoïdes (le hexécontaèdre à faces quadrangulaires de Catalan), dont le symbole sera $\left(\frac{30}{n}, \frac{\frac{12}{2}, \frac{20}{2}}{2}\right)$, puisque les arêtes du premier corps sont coupées en leur milieu et celles du second à $\frac{1}{n}$ de leur longueur, le nombre n n'étant pas entier, mais pouvant être calculé d'une manière simple.

Plus simplement, on pourrait prendre le symbole 60.

9. En outre, le corps $\left(\frac{12}{2}, \frac{20}{2}\right)$ peut être tronqué par le corps $\frac{12}{2}, \frac{20}{2}$, de sorte que l'on obtient un corps semi-régulier qui peut avoir pour symbole $\frac{30}{n'}; \frac{12}{2}, \frac{20}{2}$ où le dénominateur n' a une autre valeur que n dans le n° 8.

Au contraire, le corps $\frac{12}{2}, \frac{20}{2}$ ne peut pas directement être tronqué par l'autre.

10. Il est évident que l'on peut agir de la même manière avec le cube

Digitized by Google

et l'octaèdre (symboles 6 et 8), et l'on aura donc les corps suivants. Le chiffre romain ajouté indique le numéro dans l'une des deux Tables de Catalan, et le 1 ou 2 le numéro de la Table.

1re.....	$\frac{12}{n}$, 20		III, 1
2e.....	12, $\frac{20}{3}$		V, 1
3e.....	$\frac{12}{2}$, $\frac{20}{2}$		X, 1
4e.....	$\left(\frac{12}{2}, \frac{20}{2}\right)$	ou 30	X, 2
5e.....	$\left(\frac{30}{n}, \frac{\frac{12}{2}, \frac{20}{2}}{2}\right)$	ou 60	XV, 2
6e.....	$\frac{30}{n'}$; $\frac{12}{2}$, $\frac{20}{2}$		XV, 1
7e.....	$\frac{6}{n}$, 8		II, 1
8e.....	6, $\frac{8}{3}$		IV, 1
9e.....	$\frac{6}{2}$, $\frac{8}{2}$		IX, 1
10e.....	$\left(\frac{6}{2}, \frac{8}{2}\right)$	ou $r12$	IX, 2
11e.....	$\frac{r12}{n}$; $\frac{6}{2}$, $\frac{8}{2}$		VII, 1
12e.....	$\left(\frac{r12}{n'}, \frac{\frac{6}{2}, \frac{8}{2}}{2}\right)$	ou 24	VII, 2

11. Mais le nombre des corps déduits du dodécaèdre et de l'icosaèdre n'est pas épuisé. Car plaçant ces deux corps dans la position du n° 3 et du n° 4 et pliant à l'intérieur les losanges du corps $\left(\frac{12}{2}, \frac{20}{2}\right)$, qui les enveloppe, autour de leurs diagonales les plus courtes, on obtiendra un corps limité par 60 triangles isoscèles. On peut plier jusqu'à ce que les angles dièdres des arêtes nouvellement formées égalent ceux des autres arêtes, et l'on aura alors un corps semi-régulier de la 2e espèce. L'icosaèdre est devenu plus petit, et l'on peut nommer le corps obtenu symboliquement (12, 20v).

Digitized by Google

12. Bien entendu, en pliant les losanges du corps $\left(\frac{12}{2}, \frac{20}{2}\right)$ autour de leurs diagonales les plus longues, on peut obtenir un autre corps, symboliquement représenté par $(12v, 20)$,

13. Le lecteur peut facilement vérifier l'existence des corps suivants :

13e.....	$(12, 20v)$	V, 2
14e.....	$(12v, 20)$	III, 2
15e.....	$(6, 8v)$	IV, 2
16e.....	$(6v, 8)$	II, 2
17e.....	$\left(30; \frac{12}{2}, \frac{20}{2}v\right)$	XIV, 2
18e.....	$\left(r12; \frac{6}{2}, \frac{8}{2}v\right)$	XIII, 2
19e.....	$30v; \frac{12}{2}, \frac{20}{2}$	XIV, 1
20e.....	$r12v; \frac{6}{2}, \frac{8}{2}$	XIII, 1

14. On peut ajouter à cette liste encore :

21e.....	$\frac{4}{3}, 4$	I, 1
22e.....	$(4, 4v)$	I, 2

le dernier étant formé, en pliant les faces d'un cube, qui est un $\left(\frac{4}{2}, \frac{4}{2}\right)$, autour d'une de leurs diagonales).

15. Par les méthodes suivies dans ce qui précède on n'a pas obtenu :

VI, 1 et 2, VIII, 1 et 2 de Catalan (prismes, pyramides doubles, prismes tordés, pyramides pénétrantes);

XI 1 et 2, XII 1 et 2 (corps tordés et leurs conjugués, et qui ne sont semi-réguliers que par hasard).

16. Observant que le corps $\left(\frac{12}{2}, \frac{20}{2}\right)$, ou 30, enveloppe le 12 et le 20; que le corps $\left(\frac{30}{n}, \frac{\frac{12}{2}, \frac{20}{2}}{2}\right)$, ou 60, enveloppe le 30 et le $\frac{12}{2}, \frac{20}{2}$, on peut

Digitized by Google

imaginer un corps à 120 faces enveloppant le 60, un corps à 240 faces enveloppant celui à 120 faces, etc.

Les angles des arêtes, qui concourent aux sommets communs à ces corps et au dodécaèdre et à l'icosaèdre originaux peuvent immédiatement être calculés; de même les angles dièdres de ces arêtes. *Voir* une Conférence : *Lichamen, afgeleid uit de regelmatige* (c'est-à-dire, *des corps dérivés des corps réguliers*) au 7e Congrès national de Physique et de Médecine, 1899 (Hollande).

L'enveloppement de chaque corps par un autre peut être continué jusqu'à l'infini. Il est facile de voir que le dernier corps sera une *surface courbe*.

De même, on peut continuer l'enveloppement du cube et de l'octaèdre par le $r12$, et du $r12$ par le corps à 24 faces, en formant un corps de 48 faces, de 96 faces, etc., jusqu'à l'infini.

Le dernier corps de cette série sera aussi une surface courbe.

Le mode de formation des deux surfaces conduit à conclure : *qu'elles ne peuvent admettre d'équation analytique*.

17. La méthode précédente d'obtenir les corps semi-réguliers mène à un grand nombre de propriétés métriques et projectives.

La notation appliquée dans la brochure mentionnée au n° 1 permet de calculer très facilement les éléments des corps. L'auteur espère pouvoir publier les résultats ailleurs.

Deux propriétés seulement seront mentionnées ici :

1° Dans deux corps conjugués l'angle d'une arête de l'un des corps avec une diagonale principale qu'il rencontre égale l'angle dièdre de l'autre corps le long de l'arête correspondante;

2° Pour deux corps conjugués, l'angle d'une diagonale principale avec une face, passant par l'une de ses extrémités, est le même dans les deux corps (pour des plans correspondants).

Digitized by Google

APPLICATION OF SPACE-ANALYSIS

TO

CURVILINEAR COORDINATES,

By Prof. Alexander MACFARLANE, Lehigh University,
South Bethlehem (Pennsylvania).

In several recent papers (1), I have investigated the vector expression for Lame's first differential parameter in the case of orthogonal systems of curvilinear coordinates, and I have shewn how to deduce the expression for Lame's second differential parameter by means of direct operations of the calculus.

The results indicate that the method is not confined to orthogonal systems, but is applicable to what may be called conjugate systems. I shall first indicate the results for the spherical system of coordinates, then deduce the results for the complementary system of equilateral-hyperboloidal coordinates, and finally show how the results are modified for an ellipsoidal system of coordinates.

Let the spherical coordinates be denoted by r, θ, φ of which r denotes the modulus, θ the co-latitude, and φ the longitude. If i denote the polar axis, j and k the equatorial axes, then for any radius-vector R we have

$$R = r(\cos\theta\, i + \sin\theta\cos\varphi\, j + \sin\theta\sin\varphi\, k).$$

The axis $\cos\theta\, i + \sin\theta\cos\varphi\, j + \sin\theta\sin\varphi\, k$ may be denoted by ρ. Since

$$R = r\rho,$$

$$dR = \rho\, dr + r\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\, d\theta + r\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\, d\varphi.$$

(1) *Vector differentiation* (*Bulletin of the Philosophical Society of Washington*, Vol. XIV, p. 73-92). — *Differentiation in the Quaternion analysis* (*Proceedings of the Royal Irish Academy*, 3rd series, Vol. VI, p. 199-215).

Digitized by Google

The general definition of the operator ∇ for any function u of r, θ, φ is

$$\nabla = \frac{\partial u}{\partial r}\nabla r + \frac{\partial u}{\partial \theta}\nabla\theta + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\nabla\varphi;$$

and as R itself is such a function,

$$\nabla R = \frac{\partial R}{\partial r}\nabla r + \frac{\partial R}{\partial \theta}\nabla\theta + \frac{\partial R}{\partial \varphi}\nabla\varphi$$
$$= \rho\,\nabla r + r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\nabla\theta + r\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\nabla\varphi.$$

But $\nabla R = 3$ absolutely;
therefore

$$\nabla r = \frac{1}{\rho} \qquad \nabla\theta = \frac{1}{r\dfrac{\partial \rho}{\partial \theta}} \qquad \nabla\varphi = \frac{1}{r\dfrac{\partial \rho}{\partial \varphi}}.$$

Hence for any function of r, θ, φ,

$$\nabla = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r\dfrac{\partial \rho}{\partial \theta}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{r\dfrac{\partial \rho}{\partial \varphi}}.$$

This operator applied to any function of r, θ, φ gives the complete vector parameter.

When we pass to equilateral-hyperboloidal coordinates, r changes to the hyperbolic modulus; it is no longer $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ but $\sqrt{x^2-y^2-z^2}$ for the double sheet, and $\sqrt{-x^2+y^2+z^2}$ for the single sheet. The modulus is no longer the simple length, but it still denotes what may he called the hyperbolic length; it is the multiplier which, applied to the varying hyperbolic axis, gives the length. Also θ now denotes the hyperbolic co-latitude; φ remains unchanged in signification.

Let R denote the radius-vector as before; we now have

$$R = r\left\{\cos h\theta\, i + \frac{1}{\sqrt{-1}}\sin h\theta(\cos\varphi\, j + \sin\varphi\, k)\right\}$$

The expression within the brackets may be denoted by ρ as before; it means the radius-vector to the surface unity and is of varying length according to its position; but its modulus is always one. The $\sqrt{-1}$ which occurs in the expression has no directional, but an entirely scalar, signification. As before

$$dR = \frac{\partial R}{\partial r}dr + \frac{\partial R}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial R}{\partial \varphi}d\varphi;$$

Digitized by Google

and

$$\nabla = \frac{\partial u}{\partial r}\nabla r + \frac{\partial u}{\partial \theta}\nabla\theta + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\nabla\varphi,$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}},$$

where

$$\rho = \cos h\theta\, i + \frac{1}{\sqrt{-1}}\sin h\theta\,(\cos\varphi\, j + \sin\varphi\, k)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \sin h\theta\, i + \frac{1}{\sqrt{-1}}\cos h\theta\,(\cos\varphi\, j + \sin\varphi\, k)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\sin h\theta(-\sin\varphi\, j + \cos\varphi\, k)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\sin h\theta\, \rho_0.$$

if ρ_0 be used to denote $-\sin\varphi\, j + \cos\varphi\, k$.

It is to be noted that ∇r is not now the rate of change of r per unit of length along the normal; it is the rate of change of r in the direction of the radius at the point; and 1 per ρ is the actual amount. Similarly $\nabla\theta$ is not normal to the surface $\theta =$ constant; but has the direction of the conjugate axis at the point; and $\frac{1}{r}$ per $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ is the true amount in that direction. But $\nabla\varphi$ remains normal to the surface $\varphi =$ constant, because the conjugate direction is identical with the normal. The vectors ∇r, $\nabla\theta$, $\nabla\varphi$ now form a conjugate system, which is in general not orthogonal.

Return now to spherical coordinates, in order to consider the derivation of ∇^2.

$$(1)\quad \nabla^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{\rho}.$$

$$(2)\quad + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}}\right)\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}}.$$

$$(3)\quad + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}}\right)\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}}.$$

$$(4)\quad + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}}\right)\frac{1}{\rho}.$$

Digitized by Google

$$\nabla^2 = + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}}\right)\frac{1}{\rho}. \tag{5}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}}. \tag{6}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}}\right)\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}}. \tag{7}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}}. \tag{8}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}}\right)\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}}. \tag{9}$$

Suppose that the operators are applied to a scalar function of r, θ, φ; the only thing which remains to be determined before accomplishing the operations is how to differentiate the reciprocal of an axis, such as ρ. In the papers quoted I have shewn that an axis is differentiated in the same manner as a scalar quantity, only the negative sign is not introduced. Hence

1° term $$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{1}{\rho^2},$$

2° $$= \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{1}{r^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r^2}\frac{1}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2}\frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial \theta}},$$

3° $$= \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{1}{r^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{r^2}\frac{1}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2}\frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}},$$

4° $$= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \theta}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\rho} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r^2\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\rho},$$

5° $$= \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\rho} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{r^2\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\rho}$$

6° $$= \frac{\partial^2 u}{\partial \theta\,\partial r}\frac{1}{r\rho\frac{\partial \rho}{\partial \theta}} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}},$$

7° $$= \frac{\partial^2 u}{\partial \theta\,\partial \varphi}\frac{1}{r^2\sin\theta\,\rho_0\frac{\partial \rho}{\partial \theta}} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{1}{\rho_0\frac{\partial \rho}{\partial \theta}},$$

Digitized by Google

8° term $$= \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial r}\,\frac{1}{r\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{1}{r\rho^2}\,\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\,\frac{1}{\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}},$$

9° $$= \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\theta}\,\frac{1}{r^2\,\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\,\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\,\frac{1}{r^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi\,\partial\theta}\,\frac{1}{\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}}.$$

The space-coefficient for the terms involving $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$, is

$$\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\,\frac{1}{\frac{\partial\rho}{\partial\theta}} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\,\frac{1}{\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}};$$

that for the terms involving $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$, is

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial\theta^2}\,\frac{1}{\frac{\partial\rho}{\partial\theta}} - \frac{1}{\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\,\rho} + \frac{1}{\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi\,\partial\theta}\,\frac{1}{\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}},$$

and that for the terms involving $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}$, is

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi^2}\,\frac{1}{\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}} - \frac{1}{\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\,\rho} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\frac{1}{\rho_0\,\frac{\partial\rho}{\partial\theta}},$$

Introduce the principles of reduction,

$$\rho^2 = 1 \qquad \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 = 1 \qquad \left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2 = \sin^2\theta,$$

$$\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = -\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\,\rho, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\,\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\,\frac{\partial\rho}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\,\rho = -\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial\varphi},$$

which are simply the rules of quaternious generalized; the space-coefficients then become 2, $\cot\theta$, and 0 respectively. By application of the same rules, the square terms become

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}, \quad \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}, \quad \frac{1}{(r\sin\theta)^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2};$$

and the three pairs of product terms cancel. Hence

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{(r\sin\theta)^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Pass now to exspherical, that is equilateral-hyperboloidal coordinates. The process of differentiation evidently remains the same as before : the

Digitized by Google

question is how are the rules of reduction changed. Does ρ^2 remain equal to 1? It does; it means not the square of the length, but the square of the hyperbolic length. But $\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2$ changes into -1, for

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = \sin h\theta\, i + \frac{1}{\sqrt{-1}}\cos h\theta\,(\cos\varphi\, j + \sin\varphi\, k)$$

and therefore

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 = \sin h^2\theta - \cos h^2\theta = -1.$$

Also $\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2$ changes into $-\sin h^2\theta$, for $\sin\theta$ changes into $\frac{1}{\sqrt{-1}}\sin h\theta$.

Because $\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\,\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}$ remain a conjugate, although not an orthogonal system; the other set of rules remain unchanged, viz

$$\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = -\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\,\rho, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\,\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\,\frac{\partial\rho}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\,\rho = -\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}.$$

Hence for exspherical coordinates

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{1}{(r\sin h\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \sqrt{-1}\,\frac{\cos h\theta}{\sin h\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Consider now the extension to ellipsoidal coordinates. The mode of generalization will be seen by considering the simple case of the ellipsoid of revolution. Consider a system of similar ellipsoids, in which the ratio of the equatorial axis to the polar axis is denoted by λ. For such a system the axis is

$$\rho = \cos\theta + \lambda\sin\theta(\cos\varphi\, j + \sin\varphi\, k),$$

where θ denotes the elliptic co-latitude, that is, the ratio of the area of the segment to the area of the triangle formed by the semi-axes of the ellipse.

And

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = -\sin\theta + \lambda\cos\theta\,(\cos\varphi\, j + \sin\varphi\, k),$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = \lambda\sin\theta\,(-\sin\varphi\, j + \cos\varphi\, k).$$

As before

$$\rho^2 = 1$$

and

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 = 1,$$

Digitized by Google

but

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2 = \lambda^2 \sin^2\theta.$$

As ρ, $\frac{\partial \rho}{\partial \theta}$ and $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$ still form a conjugate system, the other set of rules remain unchanged in form, that is

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\rho, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial \theta}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\frac{\partial \rho}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\rho = \rho\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}.$$

Consequently, for such a system of coordinates

$$\nabla = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \theta}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{1}{r\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}}$$

and

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\lambda^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{\lambda r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Digitized by Google

Digitized by Google

COUP D'ŒIL

SUR

LES COURBES ALGÉBRIQUES

AU POINT DE VUE DE LA GONALITÉ,

PAR FEDERICO AMODEO (Naples).

1. — Qu'est-ce que la gonalité d'une courbe.

1. Suivant la manière de voir de Riemann, la gonalité est le plus petit nombre de points de la surface de Riemann de genre p, pour lesquels une fonction rationnelle de la surface devient infinie du premier ordre (*Œuvres mathématiques*, p. 115, 116). C'est cette même idée qu'ont exprimée avec plus de précision MM. Appell et Goursat en disant : « Pour une courbe donnée le nombre des pôles d'une fonction rationnelle (tous ces pôles étant supposés du premier ordre) ne peut pas descendre au-dessous d'un certain minimum. Ce nombre minimum, qui se conserve évidemment dans toute transformation birationnelle, paraît devoir jouer un rôle important dans la théorie des courbes algébriques. » (*Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, p. 385, 386.)

2. Selon les concepts de la Géométrie sur une courbe algébrique, l'ordre des séries linéaires complètes ou partielles (Vollschaar ou Teilschaar) simplement infinies, coupées sur la courbe par des faisceaux de variétés, et, par suite, par des faisceaux de courbes adjointes, ne peut descendre au-dessous d'un certain minimum. Cet ordre minimum des séries linéaires ∞^1, qui existent sur une courbe C_p^m, de l'ordre m, du genre p, indique la gonalité de la courbe. Nous représentons par k cette gonalité; c'est un nombre qui peut varier de 1 à ∞. Les courbes de gonalité 1 sont les courbes unicursales ou rationnelles; les courbes de gonalité 2 sont les courbes hyperelliptiques, y compris les courbes elliptiques.

Digitized by Google

2. — Méthodes et nomenclature pour l'étude de la gonalité.

3. Au point de vue analytique, la recherche de la gonalité d'une courbe se réduit à la recherche des fonctions *spéciales* des surfaces de Riemann, pourvu qu'on fasse abstraction des surfaces de genre zéro et des surfaces elliptiques. A ce propos, M. Klein dit : « L'exposition et la recherche des fonctions spéciales appartenant à une surface F_n est une des parties les plus intéressantes, mais aussi des plus difficiles, de la Théorie des surfaces de Riemann ; et, jusqu'à présent, on n'a pu s'approcher, en aucune façon, d'une résolution concluante (1). » (Klein-Fricke, *Elliptischen Modulfunctionen,* Bd I, p. 555).

C'est pourquoi il convenait d'aborder la résolution du problème par la méthode *algébrico-géométrique;* mais, par ce moyen aussi, la recherche présente de grandes difficultés; car, lorsqu'on passe des courbes hyperelliptiques aux courbes de gonalité plus élevée, les théorèmes trouvés ont été toujours regardés comme douteux, parce qu'ils manquent d'une complète généralité en ce qui concerne le genre.

4. Nous avons tenté cette voie, et nous sommes parvenu à y faire quelques pas, et à nous débarrasser des grandes difficultés que le sujet présentait, et cela tout simplement en pensant, en opposition avec ce que MM. Brill et Nöther avaient affirmé dans leur Mémoire classique, fondamental, sur la théorie de la Géométrie sur une courbe algébrique (*Math. Ann.,* VII), qu'il devait y avoir une importance capitale dans l'étude directe des courbes adjointes à la courbe C_p^m d'un ordre $< m - 3$, et surtout des courbes adjointes ayant le plus petit ordre compatible avec l'ordre et le genre de la courbe donnée. Ce sont ces courbes que nous avons appelées *courbes adjointes minimes.* Par intuition, nous nous convainquîmes que ces courbes devaient jouer, pour les courbes de gonalité > 2, le même rôle que les courbes adjointes de l'ordre $m - 3$ sur les courbes hyperelliptiques; et nous ne nous trompions pas, parce que toutes nos recherches ont confirmé et démontré ce fait essentiel de la théorie. Cette méthode de recherche nous a obligé à adopter une nomenclature plus minutieuse que celle qu'on employait auparavant; c'est pourquoi nous

(1) Die Aufstellung und Untersuchung der zu einer Fläche F_n gehörenden Specialfunctionen gehört zu den interessantesten, aber auch schwierigsten Theilen der Riemann'schen Theorie und ist bislang keineswegs einer abgeschlossenen Lösung zugänglich gewesen.

Digitized by Google

avons réservé le nom de *séries spéciales* aux seules séries linéaires coupées par les courbes adjointes de l'ordre $m-3$ et non par des courbes adjointes d'un ordre plus petit; et nous avons appelé *séries spécialisées une fois* celles qui sont coupées par des courbes adjointes de l'ordre $m-4$, et non par des courbes adjointes d'un ordre plus petit; *séries spécialisées deux fois* celles qui sont coupées par des courbes adjointes de l'ordre $m-5$, etc. En outre, nous avons appelé :

1ère	série canonique celle qui est coupée par toutes les courbes adjointes de l'ordre	$m-3$,
2ème	id.	$m-4$,
.....	.....	.....
$(\alpha+1)^{ème}$	id.	$(m-3-\alpha)$.

5. La plus grande difficulté consistait dans la détermination de la dimension effective des séries canoniques qui viennent après la première; et cette difficulté tenait à une autre qui, attaquée par M. Küpper, avait été jugée par celui-ci (*Bibl.* 1) bien difficile à surmonter. Voici de quoi il s'agit. Étant donnée une courbe C^m de l'ordre m, une courbe adjointe de l'ordre $m-3-\alpha$ doit avoir en tous points s^{-uple} de C^m, un point $(s-1)^{-uple}$, et, par suite, elle doit remplir $\frac{1}{2}\Sigma s(s-1)$ conditions linéaires, qui cependant peuvent ne pas être toutes linéairement indépendantes pour les courbes d'ordre $m-3-\alpha$, si $\alpha > 0$. Si l'on suppose que ρ_α de ces conditions dépendent linéairement des autres, on dit que ρ_α est la surabondance du système des courbes adjointes de l'ordre $m-3-\alpha$. La difficulté consistait dans la recherche d'une limite supérieure de ρ_α. Une autre difficulté venait de la nécessité d'éclaircir, en quelque sorte, le rôle et de connaître le nombre des points fixes que peuvent avoir sur C_p^m, en dehors des points multiples, les systèmes de courbes adjointes d'un ordre $< m-3$; points fixes qui manquent complètement, comme on sait, sur les courbes adjointes d'un ordre $\geqq m-3$.

3. — Résultats génériques.

6. Nous distinguerons les résultats de nos recherches en deux catégories, à savoir résultats génériques, et résultats relatifs à une gonalité déterminée.

Quant aux résultats génériques, le premier que nous sommes parvenu à établir, en considérant la $(\alpha+1)^{ème}$ série canonique coupée par les courbes adjointes de l'ordre $m-3-\alpha$, a été une limite supérieure de ρ_α, résultat dont on a douté d'abord, mais qu'on a fini par admettre. Nous

Digitized by Google

avons trouvé (*Bibl.*, 4) que

$$\rho_\alpha \leqq \tfrac{1}{2}\alpha(m-3-\alpha). \tag{1}$$

7. Un autre résultat est la forme que prend le théorème de Riemann et Roch étendu aux courbes adjointes de l'ordre $m-3-\alpha$. Le voici (*Bibl.* 5): *Si par un groupe* G_{n_α} *d'une courbe* C_p^m *passent* $\infty^{r'_\alpha}$ *courbes adjointes de l'ordre* $m-3-\alpha$, *le groupe appartient à une série linéaire complète* $g_{n_\alpha}^{r'_\alpha}$, *dont la dimension* r_α *ne peut être inférieure à*

$$n_\alpha + r'_\alpha - p + 1 + \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha+3) + \rho_\alpha,$$

de sorte qu'on doit avoir

$$r_\alpha \geqq (n_\alpha + r'_\alpha) - (p-1) + \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha+3) + \rho_\alpha. \tag{2}$$

On peut énoncer ce théorème comme il suit :

La dimension de la série linéaire complète $g_{n'_\alpha}^{r'_\alpha}$, *résiduelle de la série* $g_{n_\alpha}^{r_\alpha}$ *par rapport à la série canonique* $g_{N_\alpha}^{R_\alpha}$ *coupée par les courbes adjointes de l'ordre* $m-3-\alpha$, *est*

$$r'_\alpha \leqq (p-1) - (n_\alpha - r_\alpha) - \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha+3) - \rho_\alpha.$$

Or si nous faisons l'interprétation analytique de ce théorème, en remarquant qu'un polynome adjoint d'ordre $m-3-\alpha$ est une fonction spéciale de la surface de Riemann du genre p, et que le nombre r'_α représente le nombre des paramètres non homogènes qui entrent linéairement dans la fonction dont il s'agit, qui admet comme pôles du premier ordre les n_α points, nous parvenons au théorème suivant : *Étant donnés n points, tels qu'ils appartiennent à* $\tau = r' + 1$ *courbes adjointes de l'ordre* $m-3-\alpha$, *la fonction algébrique la plus générale, qui admet pour pôles ces points ou quelques-uns d'entre eux, renfermera linéairement au moins*

$$n + \tau - p + 1 + \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha+3) + \rho_\alpha$$

constantes arbitraires homogènes.

8. Un autre résultat, d'abord cru douteux, ensuite reconnu exact, est celui qui donne le plus petit genre des courbes de l'ordre m, douées de courbes adjointes de l'ordre $m-3-\alpha$. Ce minimum est

$$p = \tfrac{1}{2}\alpha m + 1. \tag{3}$$

9. Un résultat, dont l'exactitude n'a été mise en lumière qu'à la suite

Digitized by Google

d'une polémique avec MM. Bertini et Burkhardt, est l'extension du théorème *de réciprocité de Nöther* aux courbes adjointes de l'ordre $m - 3 - \alpha$. Il a été reconnu que :

Les ordres et les dimensions de deux séries, résiduelles entre elles par rapport à la série canonique $g^{R_\alpha}_{N_\alpha}$, coupée par les courbes adjointes de l'ordre $m - 3 - \alpha$, sont liées par les relations

$$(4) \quad n_\alpha + n'_\alpha = N_\alpha \quad [2(r_\alpha - r'_\alpha) - (n_\alpha - n'_\alpha)] \leqq 2[\tfrac{1}{2}\alpha(m - 3 - \alpha) - \rho_\alpha].$$

10. En outre, nous avons trouvé que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence des courbes adjointes $C^{m-3-\alpha}$ est

$$p \geqq \tfrac{1}{2}\alpha m + 1 + (\delta_\alpha - \rho_\alpha),$$

où δ_α représente la plus haute valeur donnée par la limitation (1) que ρ_α puisse atteindre, pourvu que l'on admette aussi le cas limite, à savoir que, dans une courbe sans points multiples, tout point puisse être considéré comme une courbe adjointe de l'ordre zéro; et cela a sa raison d'être (*Bibl.*, 12).

11. Enfin nous avons trouvé que la formule connue du plus haut genre d'une courbe C^m dans un espace à d dimensions prend les formes suivantes, selon que l'ordre m est congru à 1, à 2 ou 0, à 3 ou $d - 2$, à 4 ou $d - 3$, par rapport au module $d - 1$:

pour d pair... $p = \dfrac{(m-1)(m-d)}{2(d-1)}, \dfrac{(m-2)(m-d-1)}{2(d-1)}, \ldots, \dfrac{(m-\frac{1}{2}d)(m-\frac{1}{2}d-1)}{2(d-1)},$

pour d impair. $p = \dfrac{(m-1)(m-d)}{2(d-1)}, \dfrac{(m-2)(m-d-1)}{2(d-1)}, \ldots, \dfrac{\left(m-\frac{d+1}{2}\right)^2}{2(d-1)}.$

4. — Résultats relatifs aux courbes de gonalité donnée.

12. Afin d'exposer avec clarté les propriétés des courbes algébriques qui ont rapport à une gonalité donnée, nous signalerons d'abord les propriétés communes à toutes les courbes de gonalité k, et nous exposerons ensuite les propriétés des courbes ayant même gonalité, mais remplissant, en outre, quelque autre condition. Il faut, avant tout, remarquer que, sur les surfaces de Riemann, à modules généraux et de gonalité k, Riemann même a trouvé que : *Lorsque les valeurs de ramification de la surface ne satisfont pas à des équations de condition, il faut que l'on ait*

Digitized by Google

(*Œuvres mathém.*, p. 116)

$$k \geq \tfrac{1}{2} p + 1.$$

A notre tour nous avons trouvé (*Bibl.*, 6) qu'on doit avoir aussi

$$k \leq \tfrac{1}{2}(p + 3),$$

d'où il suit que : *Les surfaces de Riemann, à modules généraux, sur lesquelles les fonctions rationnelles admettent k comme minimum des pôles du premier ordre, sont celles des genres* $2k - 3$, $2k - 2$. Ce théorème peut être traduit et complété par le suivant :

Parmi toutes les courbes de gonalité donnée k, il n'y a que les courbes des genres $2k - 3$, $2k - 2$, *qui* puissent *être à modules généraux; et, parmi ces dernières, celles dont le genre est* $2k - 3$ *admettent une simple infinité de* g_k^1, *tandis que les autres en ont seulement* $\frac{p!}{k!\,(k-1)!}$.

Pour tous les autres genres les courbes admettent des modules particuliers; mais cela n'empêche pas que les courbes de gonalité k, des genres $2k - 3$ et $2k - 2$, puissent avoir des modules particuliers. Il a été reconnu (*Bibl.*, 19) que cela n'arrive pas pour les courbes hyperelliptiques des genres 1 et 2, ni pour les courbes trigonales des genres 3 et 4; mais cela commence à être vrai pour les courbes tétragonales. On trouve en effet parmi ces courbes la C_6^7 du septième ordre, de genre 6, qui est à modules particuliers et admet une simple infinité de g_4^1 si elle est douée de trois points triples; mais, si elle a deux points triples et trois points doubles arbitraires, elle est à modules généraux, et n'admet que cinq g_4^1. La première de ces courbes est une transformée quadratique de la courbe du cinquième ordre sans points doubles; l'autre est transformée quadratique de la C_6^6 du sixième ordre avec quatre points doubles.

13. Voici les autres résultats, ayant rapport aux propriétés génériques des courbes algébriques de gonalité donnée k :

1° *Si une courbe k-gonale* C_p^m *admet au moins* $k - \alpha$ *courbes adjointes de l'ordre* $m - 3 - \alpha$, *linéairement indépendantes, les courbes* $C^{m-3-\alpha}$, *qui passent par* $k - 1 - \alpha$ *points d'un groupe d'une* g_k^1, *passent par tous les autres points du groupe; elles coupent une* $g_{N_\alpha - k}^{R_\alpha + \alpha + 1 - k}$, *de sorte que les courbes adjointes* $C^{m-3-\alpha}$, *qui passent par un groupe de cette série, rencontrent la* g_k^1 (*Bibl.*, 8 et 15). En particulier : *Tout groupe de la série* g_k^1 *équivaut à* $k - 2$ *conditions pour*

Digitized by Google

toute C^{m-4} *adjointe, à* $k-3$ *conditions pour toute* C^{m-5} *adjointe, ..., à une seule condition pour toute courbe adjointe de l'ordre* $m-k-1$.

2° *Les courbes k-gonales de l'ordre m ne peuvent avoir de courbe adjointe d'un ordre inférieur à* $m-k-1$. On en déduit que :

a. Le plus haut genre que puissent atteindre les courbes k-gonales de l'ordre m est

$$p=(k-1)m-\frac{1}{2}(k-1)(k+2). \tag{6}$$

b. Si le nombre des points doubles d'une courbe plane simple, de l'ordre m, est moindre que $\frac{1}{2}(m-k)(m-k-1)$, *la gonalité de la courbe surpasse k.*

3° *Sur les courbes k-gonales singulières dans leur genre, il ne peut exister de séries irrationnelles, involutoires, simplement infinies, de l'ordre k et de genre* $\pi<\frac{p-(k-1)^2}{k}$.

4° *Les courbes k-gonales, dont le genre surpasse* $(k-1)^2$, *doivent nécessairement avoir une seule* g_k^1. (*Bibl.*, 3 et 15).

5° *Les courbes k-gonales à modules particuliers, dont le genre surpasse* $2k-2$, *mais non* $(k-1)^2$, *peuvent aussi avoir une seule* g_k^1.

5. — Propriétés des courbes *k*-gonales douées de courbes adjointes C^{m-k-1}.

14. En nous bornant, pour le moment, à l'examen des courbes k-gonales, douées de courbes adjointes du plus petit ordre compatible avec la gonalité, nous trouvons en premier lieu que ces courbes ont un caractère fondamental très remarquable, qui est la source d'une foule de propriétés simples et intéressantes. Le caractère dont il s'agit consiste en ce que *tout groupe de chaque* g_k^1, *existant sur la courbe, a ses points en ligne droite* (*Bibl.*, 6). Comme on a vu plus haut, chacun de ces groupes équivaut à une seule condition pour toute courbe adjointe C^{m-k-1}, d'où il suit que : *s'il y a une infinité de ces courbes adjointes* C^{m-k-1}, *toute* g_k^1 *est coupée par un faisceau de courbes* C^{m-k-1}.

Si, au contraire, il n'y a qu'une seule courbe adjointe C^{m-k-1}, toute g_k^1 qui existe sur la courbe donnée est coupée par un faisceau de courbes adjointes de l'ordre $m-k$.

15. 1° *Le genre le plus bas que puisse atteindre une courbe*

Digitized by Google

k-gonale, douée de courbes adjointes minimes, est

$$p = \frac{1}{2}(k-2)\,m + 1. \tag{7}$$

2° *Les courbes k-gonales, dont le genre satisfait aux limitations suivantes :*

$$\frac{1}{2}(k-2)\,m + 1 + (\delta_{k-2} - \rho_{k-2}) \leqq p \leqq (k-1)\,m - \frac{1}{2}(k-1)(k+2) \tag{8}$$

ont certainement en ligne droite les points de tout groupe de chaque g_k^1.

16. *L'enveloppe des droites qui coupent une* g_k^1 *sur la courbe k-gonales* C_p^m *est de la classe* (*Bibl.*, 7).

$$s = 1 + \frac{2(\theta - \xi)}{k(k-1)}, \tag{9}$$

où θ représente l'excès du genre maximum des courbes k-gonales sur le genre p de la courbe donnée, et ξ est le nombre des couples de points communs à g_k^1 et à toute g_m^1 coupée sur la courbe par des faisceaux de droites, c'est-à-dire le nombre des couples de points des groupes de g^1, qui tombent aux points multiples de C_p^m, et qui proviennent de points situés sur des branches distinctes. On en déduit que :

Le nombre θ *est toujours égal à* ξ, *augmenté d'un multiple de* $\frac{1}{2}k(k-1)$, c'est-à-dire (*Bibl.*, 6 et 19).

$$\theta = \xi + \frac{1}{2}k(k-1)\,t \leqq \frac{1}{2}k(m-k-1). \tag{10}$$

6. — Courbes k-gonales sans points fixes pour le C^{m-k-1}.

17. Après avoir établi ces propriétés communes à toutes les courbes k-gonales douées de courbes adjointes minimes, il ne semblait pas facile d'aller en avant; et, pour séparer les difficultés qui se présentaient, nous eûmes d'abord l'idée de considérer, parmi ces courbes, seulement les courbes de gonalité k, qui n'ont pas de points fixes dans la $(k-1)^{\text{ième}}$ série canonique, coupée par les courbes adjointes C^{m-k-1} et pour lesquelles ξ aussi est égal à zéro. Voici les propriétés que nous avons pu découvrir :

1° *La série canonique coupée sur ces courbes par les courbes adjointes* C^{m-k-1}, *lorsque la dimension du système de ces courbes est*

Digitized by Google

> 1, *est une série* g^{R}_{kR} *toujours composée moyennant la série* g^{1}_{k}, R *étant la dimension du système des courbes adjointes de l'ordre* $m - k - 1$; de sorte que la $(k-1)^{\text{ième}}$ série canonique se comporte pour ces courbes comme la série canonique, coupée par les courbes adjointes C^{m-3}, (*Bibl.*, 6), se comporte pour les courbes hyperelliptiques.

2° *Toutes les courbes adjointes* C^{m-k-1}, *qui passent par les groupes d'une* g^{1}_{k}, *coupées par des droites, qui contiennent un point du plan, passent aussi par ce point* (*Bibl.*, 9 et 15).

18. Afin de pouvoir faire une étude à peu près complète de cette catégorie de courbes, nous avons trouvé utile de la distribuer en familles, en adoptant comme caractère différentiel un caractère projectif que nous avons appelé l'*espèce* de la courbe. Le nombre qui indique l'espèce de la courbe est égal à la classe de l'enveloppe des droites qui coupent sur la courbe toute g_k. Cette division en familles a été pour nous d'une grande utilité comme moyen de recherche; mais elle disparaîtra peut-être lorsqu'on parviendra à retrouver d'une manière directe les résultats obtenus. Elle nous a semblé surtout utile pour chercher et étudier des courbes d'un genre et d'une gonalité donnés, douées de seuls points doubles.

19. En nous bornant aux courbes de première et deuxième espèces, nous avons pu faire connaître leur construction effective au moyen de faisceaux de courbes (*Bibl.*, 9); nous avons signalé l'existence d'une infinité de réseaux et de systèmes triples, quadruples, ... de courbes de l'ordre m sans points doubles, qui ont des réseaux à intersections variables, formés de groupes de $m - 1$ points qui sont en ligne droite (*Bibl.*, 11); et nous avons pu établir que :

1° *Dans les courbes k-gonales de première espèce, les valeurs de* ρ_0, $\rho_1, \ldots, \rho_{k-2}$ *sont toutes égales à zéro.*

2° *Dans les courbes de seconde espèce, qui ont une seule courbe adjointe de l'ordre* $m - k - 1$, *c'est-à-dire dans les courbes* $C^{2k}_{(k-1)^2}$, *on a*

$$(11)\qquad \begin{cases} \rho_0 = 0, \qquad \rho_1 = 1, \qquad \rho_2 = 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots, \rho_{k-4} = \binom{k-3}{2}, \qquad \rho_{k-4} = \binom{k-2}{2}, \qquad \rho_{k-2} = \binom{k-1}{2}. \end{cases}$$

3° *Dans les courbes k-gonales de seconde espèce, la série coupée par toutes les coniques du plan est contenue dans une série linéaire*

Digitized by Google

complète g^{8}_{4k}; *la série coupée par toutes les cubiques du plan est contenue dans une* g^{15}_{6k} *linéaire complète; etc.*

20. Pour les courbes de gonalité k et d'espèce $s \geqq 1$ en général, les résultats les plus essentiels se rapportent à la détermination précise des dimensions de quelques-unes des séries complètes, coupée sur ces courbes par les courbes adjointes et par des courbes non adjointes. Parmi ces résultats on a jugé très difficile, et important, celui qui concerne la dimension de la série linéaire complète, qui contient la série linéaire coupée sur les courbes par les droites du plan. Voici les théorèmes (*Bibl.*, 15) :

1° *La dimension de la série linéaire complète, qui contient la série coupée par les droites du plan, est égale à l'espèce de la courbe augmentée de l'unité.*

2° *La surabondance* ρ_1 *du système des courbes adjointes de l'ordre* $m-4$ *est* $s-1$.

3° *La surabondance* ρ_{k-3} *du système des courbes adjointes de l'ordre* $m-k$ *est* $\frac{1}{2}(s-1)(k-2)(k-3)$.

4° *La surabondance* ρ_{k-2} *du système des courbes adjointes de l'ordre* $m-k-1$ *est* $\frac{1}{2}(s-1)(k-1)(k-2)$.

5° *La dimension de la* $(k-2)^{\text{ième}}$ *série canonique, coupée par les courbes adjointes de l'ordre* $m-k$, *est* $2R+s+1$, *d'où il suit que la série en question est* $g^{2R+s+1}_{k(R+s)+R-(s-2)}$.

21. Du premier des théorèmes qui précèdent on déduit (*Bibl.*, 17) :

Toutes les courbes k-gonales de $s^{\text{ième}}$ *espèce sont des projections de courbes du même ordre, mais* normales *pour l'espace de dimension* $s+1$; *et ces courbes normales appartiennent à des surfaces réglées rationnelles de l'ordre s, dont chaque génératrice les rencontre k fois.*

7. — Courbes k-gonales avec points fixes pour les C^{m-k-1}.

22. Il nous reste à dire quelques mots sur les courbes algébriques k-gonales, qui ont des courbes adjointes minimes de l'ordre $m-k-1$, et qui présentent en outre un certain nombre σ de points fixes pour ces courbes adjointes, en dehors des points multiples, ou bien qui ont $\xi \neq 0$. L'étude de ce sujet concerne aussi, pour $\xi = 0$, $\sigma = 0$, toutes les courbes considérées dans le paragraphe précédent, de sorte qu'on peut dire que

Digitized by Google

nous allons maintenant considérer toutes les courbes k-gonales, douées de courbes adjointes C^{m-k-1}. Le genre de ces courbes est donné par la formule

$$(12) \qquad p = (k-1)m - \frac{1}{2}(k-1)(k+2) - \frac{1}{2}(k-1)kt - \xi$$
$$= \frac{1}{2}(k-1)(2m - ks - 2) - \xi,$$

et, dans ce cas, l'enveloppe des droites auxquelles appartiennent les groupes d'une g_k^1 est de la classe

$$s = t + 1.$$

Nous conserverons pour ces courbes la division *en espèces;* mais il ne faudra pas perdre de vue que, parmi les courbes de $s^{\text{ième}}$ espèce, on trouve maintenant, non seulement les courbes déjà considérées $\left(\begin{smallmatrix}\sigma=0\\ \xi=0\end{smallmatrix}\right)$, mais encore toutes les autres courbes, pour lesquelles les nombres σ et ξ ne sont pas tous les deux nuls.

23. Le premier théorème qu'il convient de signaler est le suivant :

Toute courbe k-gonale, dont l'enveloppe de g_k^1 est de la classe s, peut être transformée birationnellement en une courbe k-gonale du même ordre, douée d'un point $(m-k)^{uple}$, de $s-1$ points k^{uples}, et d'autres points multiples, de multiplicité inférieure à k, équivalents à ξ points doubles.

Cette courbe peut aussi se transformer birationnellement en une autre courbe k-gonale de première espèce d'un ordre inférieur m' douée d'un point $(m'-k)^{uple}$ et d'autres points multiples, de multiplicité inférieure à k.

Grâce à ce théorème, les propriétés invariantives des courbes k-gonales peuvent être obtenues par la considération des seules courbes k-gonales de première espèce, douées d'un point $(m-k)^{\text{up.e}}$ et d'autres points multiples, de multiplicité inférieure à k.

24. Voici quels sont les caractères de ces courbes : On a $\theta = \xi$; le genre et l'ordre sont

$$p = \frac{1}{2}(k-1)(2m-k-2) - \theta, \qquad m \geqq k + 1 + \frac{2\theta}{k};$$

le nombre des points fixes est

$$\sigma = (k-2)\theta - k\rho_{k-2};$$

Digitized by Google

la dimension R et l'ordre N de la $(k-1)^{\text{ième}}$ série canonique sont

$$R = m - k - 1 - (\theta - \rho_{k-2}), \qquad N = kR + \sigma.$$

Le nombre des points doubles arbitraires est $\theta - \rho_{k-2}$, et il y a, entre θ et ρ_{k-2}, la relation suivante

$$\rho_{k-2} \leqq \frac{k-2}{k}\theta,$$

qui nous a été communiquée par M. Küpper.

25. En particulier, pour les courbes hyperelliptiques, on trouve (en faisant $k=2$) $\sigma = -k\rho_0$; mais σ ne peut être négatif, donc $\sigma = 0$, ce qui démontre (pour la première fois, d'une manière directe) qu'il ne peut y avoir de points fixes dans la série canonique sur les courbes hyperelliptiques.

26. Les caractères des courbes, dont il a été question au n° **24**, peuvent être utilement exprimés en fonction de la dimension R du système des courbes adjointes minimes

$$p = \frac{1}{2}(k-1)(2R+k) + (k-2)\theta - (k-1)\rho_{k-2},$$
$$m = R + k + 1 + (\theta - \rho_{k-2}),$$

et les courbes ont un point $(m-k)^{\text{uple}}$, et d'autres points multiples de multiplicité inférieure à k, équivalents à θ points doubles.

Les courbes adjointes minimes se réduisent au système de

$$R + (\theta - \rho_{k-2})$$

droites dont $\theta - \rho_{k-2}$ sont fixes et déterminent les σ points fixes de la courbe.

27. Les courbes pour lesquelles on a $\rho_{k-2} = 0$ ont une importance particulière, parce qu'elles comprennent les courbes trigonales de première espèce.

Pour de telles courbes on a le théorème que voici :

1° *Les courbes* C_p^m *k-gonales de première espèce, pour lesquelles on a* $\rho_{k-2} = 0$, *n'admettent que des points doubles, et un seul point* $(m-k)^{\text{uple}}$ *qui n'est pas en ligne droite avec deux de ces points.*

2° *La série coupée sur ces courbes par les droites du plan est com-*

Digitized by Google

plète, d'où il suit que les courbes en question sont des courbes normales pour le plan.

En se bornant au cas particulier $k = 3$, on retrouve le théorème de Bobek, $\sigma = \theta$, et l'on arrive à établir la représentation normale de toutes les courbes trigonales, résultat que nous avons eu l'honneur de communiquer à l'Académie des Sciences de Paris, et qu'on peut résumer dans le théorème suivant :

3° *Toute courbe trigonale (par conséquent de genre $p \geqq 3$) peut être représentée au moyen d'une courbe normale du plan, de l'ordre $\frac{p}{2} + 3$ ou $\frac{p-1}{2} + 3$, selon que p est pair ou impair. La courbe normale doit avoir un point $\left(\frac{p}{2}\right)^{uple}$ et un seul point double dans le premier cas, et ne doit avoir, dans l'autre cas, qu'un point $\left(\frac{p-1}{2}\right)^{uple}$.*

BIBLIOGRAPHIE.

1. Karl Küpper. — 1° *Ueber die Curve C_p^n von n^{ter} Ordnung und dem Geschlecht > 1 auf welchem die einfachen specialschaaren g_2^1, g_3^1 vorkommen* [*Prag. Abh.* (7) III, 1889].

2. Karl Bobek. — *Ueber Dreischaarcurven* [*Wien. Ber.*, Bd 98, p. 142-173; 1889].

3. Federico Amodeo. — 1° *Contribuzione alla teoria delle serie irrazionali involutorie giacenti sulle varietà algebriche ad una dimensionse* [*Ann. di Matem.* (2), Vol. 20, Giugno, 1892].

4. — 2° *Curve aggiunte minime* [*Rend. Acc. Lincei,* Vol. 2, p. 450-467, 21 maggio; Roma, 1893].

5. — 3° *Serie résidue nella serie canonica delle curve agg. di ord. $m - 3 - \alpha$* [*Rend. Acc. Lincei,* Vol. 2, p. 528-532; Roma, 3 giugno 1893].

6. — 4° *Curve k-gonali* [*Ann. di Matem.* (2), Vol. 21, p. 221-236; giugno 1893].

7. Eugenio Bertini. — *La Geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* [*Ann. di Matem.* (2), Vol. 22, 1894].

8. Karl Küpper. — 2° *Ueber k-gonale Curven C_p^m n^{ter} Ordnung von Geschlecht $p > 1$* [*Prag. Ber. k. böhm. Ges. d. Wiss.*, 14 juin 1895; *Monatsh. f. Math. u. Phys.* VIII Jahrg].

Digitized by Google

9. FEDERICO AMODEO. — 5° *Curve k-gonali di 1ª e di 2ª specie* [*Ann. di Matem.* (2)., Vol. 24, p. 1-22 (agosto 1895), 1896].

10. KARL KÜPPER. — 3° *Ueber beziehungen zwischen Polygonalen und Raumcurven* [*Prag. Ber. d. k. böhm. Ges., d. Wiss.*, 7 Febb. 1896].

11. FEDERICO AMODEO. — 6° *Sistemi lineari di curve algebriche di genere massimo ad intersezioni variabili collineari* [*Rend. Acc. d. Sc. di Napoli*, 7 marzo 1896].

12. — 7° *Curve aggiunte e serie specializzate* (*id.*, 28 mov. 1896).

13. H. BURKHARDT.— *Zur Theorie der linearen Schaaren von Puhktaggregaten auf algebraischen Curven* [*Nachr. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 21 nov. 1896].

14. KARL KÜPPER. — 4° *Die Ultraelliptische Curven* [*Prag. Ber. d. k. Ges. Wiss.*, 18 Dec. 1896].

15. FEDERICO AMODEO. — 8° *Curve k-gonali di sesima specie* [*Atti Acc. d. Sc. di Napoli* (2), Vol. 9, n. 4, 23 ott. 1897].

16. KARL KÜPPER. — 5° *Curventheoretisches* [*Prag. Ber. d. k. böhm. Ges. d Wiss.*, 14 Genn. 1898].

17. FEDERICO AMODEO. — 9° *Spazio normale e genere massimo delle curve di ord. m, k-gonali di specie s* [*Rend. Acc. d. Sc. di Napoli*, 29 ott. 1898].

18. — 10° *Courbes normales trigonales du plan* [*Comptes rendus;* Paris, 25 juin 1900].

19. — 11° *Curve di gonalità k con punti fissi nella* $(k-1)^{esima}$ *serie canonica e curve normali trigonali del piano* [*Rend. Acc. d. Sc. di Napoli*, 7 luglio 1900].

20. FEDERICO AMODEO. — 12° *Contributo alla determinazione delle sovrabbondanze dei sistemi di curve aggiunte alle curve algebriche* [*Rend. Acc. di Napoli*, déc. 1900].

Digitized by Google

ORTHOGONAL TRANSFORMATIONS

IN ELLIPTIC, OR IN HYPERBOLIC SPACE,

By Irving STRINGHAM, Ph. D.,

PROFESSOR IN THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

1. Let Cayley's well known matric of the hexaparametric orthogonal transformation be written in the form [1]

$$\left(\frac{2}{K_0}\right)^4 \begin{vmatrix} \frac{1}{2}K_0-\Theta_0^2-[a_0b_0c_0] & \Delta_0+a_0+f_0\Theta_0 & B_0+b_0+g_0\Theta_0 & C_0+c_0+h_0\Theta_0 \\ A_0-a_0-f_0\Theta_0 & \frac{1}{2}K_0-\Theta_0^2-[a_0g_0h_0] & H_0-h_0-c_0\Theta_0 & G_0+g_0+b_0\Theta_0 \\ B_0-b_0-g_0\Theta_0 & H_0+h_0+c_0\Theta_0 & \frac{1}{2}K_0-\Theta_0^2-[b_0h_0f_0] & F_0-f_0-a_0\Theta_0 \\ C_0-c_0-h_0\Theta_0 & G_0-g_0-b_0\Theta_0 & F_0+f_0+a_0\Theta_0 & \frac{1}{2}K_0-\Theta_0^2-[c_0f_0g_0] \end{vmatrix},$$

the factor $\left(\frac{2}{K_0}\right)^4$ being prefixed hereto in order to indicate that each element of the matrix is to be multiplied by $\frac{2}{K_0}$, and the letters K_0, Θ_0, [ ],

(1) Crelle, Bd XXXII (1846), p. 119-123. Of other references I cite the following as of special utility: Study, *Ueber die Bewegungen des Raumes,* in Leipz. Berichte, p. 341-354, 1890; Hausdorff, *Analytische Beiträge zur Nicht-Euklidischen Geometrie,* Leipz. Berichte, p. 161-214, 1899; Klein, *Vorlesungen über Nicht-Euklidischen Geometrie,* II, Göttingen, 1893; Gerlach, *Die Metrik in projektivischen Koordinaten,* Inaug. Dissertation, Zürich, 1899; Killing, *Die Nicht-Euklidischen Raumformen,* Leipzig, 1885; Lindemann, *Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgem. proj. Massbestimmung* (*Math. Ann.,* Bd VII, 1874, p. 56-143); Cayley, *On the Rotation of a Solid Body round a Fixed Point* (*Camb. and Dublin Math. Journal,* Vol. I, 1846, p. 167-173, 264-274); Rodrigues, *Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, etc.* (*Journal de Liouville,* t. V, 1840, p. 380-440).

Digitized by Google

A_0, B_0, C_0, F_0, G_0, H_0 being used for brevity to represent the following functions of the parameters :

$$K_0 = 1 + a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + f_0^2 + g_0^2 + h_0^2 + \theta_0^2,$$

$$\theta_0 = a_0 f_0 + b_0 g_0 + c_0 h_0,$$

$$[a_0 b_0 c_0] = a_0^2 + b_0^2 + c_0^2, \qquad [a_0 g_0 h_0] = a_0^2 + g_0^2 + h_0^2,$$

$$[b_0 h_0 f_0] = b_0^2 + h_0^2 + f_0^2, \qquad \ldots,$$

$$A_0 = b_0 h_0 - c_0 g_0, \qquad B_0 = c_0 f_0 - a_0 h_0, \qquad C_0 = a_0 g_0 - b_0 f_0,$$

$$F_0 = g_0 h_0 - b_0 c_0, \qquad G_0 = h_0 f_0 - c_0 a_0, \qquad H_0 = f_0 g_0 - a_0 b_0.$$

2. Let it be assumed that this matrix, which I denote by M_0, is composite, and let it be proposed to determine two other matrices M, M', such that

$$MM' = M_0.$$

For this purpose assume that M has the form

$$M = \begin{vmatrix} 1 - 2\frac{[abc]}{K} & 2\frac{A+a}{K} & 2\frac{B+b}{K} & 2\frac{C+c}{K} \\ 2\frac{A-a}{K} & 1 - 2\frac{[agh]}{K} & 2\frac{H-h}{K} & 2\frac{G+g}{K} \\ 2\frac{B-b}{K} & 2\frac{H+h}{K} & 1 - 2\frac{[bhf]}{K} & 2\frac{F-f}{K} \\ 2\frac{C-c}{K} & 2\frac{G-g}{K} & 2\frac{F+f}{K} & 1 - 2\frac{[cfg]}{K} \end{vmatrix},$$

whereby the condition

$$\theta = af + bg + ch = 0$$

is satisfied, and

$$K = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2,$$

$$[abc] = a^2 + b^2 + c^2.$$

$$A = bh - cg, \qquad B = cf - ah, \qquad C = ag - bf,$$

$$F = gh - bc, \qquad G = hf - ca, \qquad H = fg - ab.$$

The transformation defined by this matrix has five independent parameters, while M_0 has six. M' must therefore introduce a sixth parameter not contained in M. In order that this state of things may be exactly realized, that is, in order that the equation $MM' = M_0$ may be identically

Digitized by Google

true, it suffices to give to M′ the form

$$M' = \begin{vmatrix} 1 - 2\dfrac{[f'g'h']}{K'} & -2\dfrac{A'-f'}{K'} & -2\dfrac{B'-g'}{K'} & -2\dfrac{C'-h'}{K'} \\ -2\dfrac{A'+f'}{K'} & 1-2\dfrac{[b'c'f']}{K'} & -2\dfrac{H'+c'}{K'} & -2\dfrac{G'-b'}{K'} \\ -2\dfrac{B'+g'}{K'} & -2\dfrac{H'-c'}{K'} & 1-2\dfrac{[c'a'g']}{K'} & -2\dfrac{F'+a'}{K'} \\ -2\dfrac{C'+h'}{K'} & -2\dfrac{G'+b'}{K'} & -2\dfrac{F'-a'}{K'} & 1-2\dfrac{[a'b'h']}{K'} \end{vmatrix},$$

whose six parameters are connected with those of M by the relations

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} = \frac{h'}{h} = r,$$

r being arbitrary. Here also

$$\Theta' = a'f' + b'g' + c'h' = r^2\Theta = 0,$$

and the meanings of K′, [ ], A′, B′, C′, etc., are

$$K' = 1 + a'^2 + b'^2 + c'^2 + f'^2 + g'^2 + h'^2,$$
$$[f'g'h'] = f'^2 + g'^2 + h'^2.$$
$$A' = b'h' - c'g', \qquad B' = c'f' - a'h', \qquad C' = a'g' - b'f',$$
$$F' = g'h' - b'c', \qquad G' = h'f' - c'a', \qquad H' = f'g' - a'b'.$$

Observe that M′ may be derived from M by changing a, b, c, f, g, h, into f', g', h', a', b', c', respectively.

3. Let the product MM′ be now formed by the ordinary rule for the multiplication of matrices, the combinations being : columns by rows. It will be found that, except where unity appears as a term in the principal diagonals, this multiplication process merely adds together the corresponding elements of the two factors. The terms 1, wherever found, are not doubled but reappear unchanged in the principal diagonal of the product matrix. The product MM′ is, in fact,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{[abc]}{K} - 2\dfrac{[f'g'h']}{K'} & 2\left(\dfrac{A}{K} - \dfrac{A'}{K'}\right) + 2\left(\dfrac{a}{K} + \dfrac{f'}{K'}\right) & 2\left(\dfrac{B}{K} - \dfrac{B'}{K'}\right) + 2\left(\dfrac{b}{K} + \dfrac{g'}{K'}\right) & 2\left(\dfrac{C}{K} - \dfrac{C'}{K'}\right) + 2\left(\dfrac{c}{K} + \dfrac{h'}{K'}\right) \\ \dfrac{A'}{K'}\Big) - 2\left(\dfrac{a}{K} + \dfrac{f'}{K'}\right) & 1 - 2\dfrac{[agh]}{K} - 2\dfrac{[b'c'f']}{K'} & 2\left(\dfrac{H}{K} - \dfrac{H'}{K'}\right) - 2\left(\dfrac{h}{K} + \dfrac{c'}{K'}\right) & 2\left(\dfrac{G}{K} - \dfrac{G'}{K'}\right) + 2\left(\dfrac{g}{K} + \dfrac{b'}{K'}\right) \\ \dfrac{B'}{K'}\Big) - 2\left(\dfrac{b}{K} + \dfrac{g'}{K'}\right) & 2\left(\dfrac{H}{K} - \dfrac{H'}{K'}\right) + 2\left(\dfrac{h}{K} + \dfrac{c'}{K'}\right) & 1 - 2\dfrac{[bhf]}{K} - 2\dfrac{[c'a'g']}{K'} & 2\left(\dfrac{F}{K} - \dfrac{F'}{K'}\right) - 2\left(\dfrac{f}{K} + \dfrac{a'}{K'}\right) \\ \dfrac{C'}{K'}\Big) - 2\left(\dfrac{c}{K} + \dfrac{h'}{K'}\right) & 2\left(\dfrac{G}{K} - \dfrac{G'}{K'}\right) - 2\left(\dfrac{g}{K} + \dfrac{b'}{K'}\right) & 2\left(\dfrac{F}{K} - \dfrac{F'}{K'}\right) + 2\left(\dfrac{f}{K} + \dfrac{a'}{K'}\right) & 1 - 2\dfrac{[cfg]}{K} - 2\dfrac{[a'b'h']}{K'} \end{vmatrix}.$$

Digitized by Google

The form of this matrix shows at once that the multiplication is commutative; that is

$$MM' = M'M.$$

4. The foregoing synthesis has produced a matrix whose elements are functions of the seven parameters a, b, c, f, g, h, r, between the first six of which the one relation exist

$$af + bg + ch = 0.$$

This matrix therefore defines a hexaparametric transformation, which, by virtue of the fact that it is the resultant of two orthogonal transformations, is itself orthogonal.

But it may be transformed into the Cayleyan matrix. The substitutions by which the transition is made are

$$\begin{aligned} a_0 &= a + f', & b_0 &= b + g', & c_0 &= c + h', \\ f_0 &= f + a', & g_0 &= g + b', & h_0 &= h + c'; \end{aligned}$$

and from these equations, by successive eliminations, are obtained

$$\Theta_0 = r(K - 1) = \frac{1}{r}(K' - 1), \qquad \Theta_0^2 = (K - 1)(K' - 1), \qquad K_0 = KK',$$

$$\begin{aligned} a_0 + f_0\Theta_0 &= aK' + f'K, & b_0 + g_0\Theta_0 &= bK' + g'K, & c_0 + h_0\Theta_0 &= cK' + h'K, \\ f_0 + a_0\Theta_0 &= fK' + a'K', & g_0 + b_0\Theta_0 &= gK' + b'K, & h_0 + c_0\Theta_0 &= hK' + c'K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0 &= AK' - A'K, & B_0 &= BK' - B'K, & C_0 &= CK' - C'K, \\ F_0 &= FK' - F'K, & G_0 &= GK' - G'K, & H_0 &= HK' - H'K, \end{aligned}$$

$$1 - 2\frac{\Theta_0^2 + a_0^2 + b_0^2 + c_0^2}{K_0} = 1 - 2\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{K} + \frac{f'^2 + g'^2 + h'^2}{K'}\right),$$

$$1 - 2\frac{\Theta_0^2 + a_0^2 + g_0^2 + h_0^2}{K_0} = 1 - 2\left(\frac{a^2 + g^2 + h^2}{K} + \frac{b'^2 + c'^2 + f'^2}{K'}\right),$$

$$1 - 2\frac{\Theta_0^2 + b_0^2 + h_0^2 + f_0^2}{K_0} = 1 - 2\left(\frac{b^2 + h^2 + f^2}{K} + \frac{c'^2 + a'^2 + g'^2}{K'}\right),$$

$$1 - 2\frac{\Theta_0^2 + c_0^2 + f_0^2 + g_0^2}{K_0} = 1 - 2\left(\frac{c^2 + f^2 + g^2}{K} + \frac{a'^2 + b'^2 + h'^2}{K'}\right).$$

All the forms that appear in the two matrices under consideration are here represented, and when the Cayleyan matrix is constructed with the expressions on the left side of the signs of equality, their equivalents on the right form the matrix which has been constructed as the product of M and M'. Stated in general terms this result is as follows :

The orthogonal transformation with six independent parameters is expressible as the product of a pair of pentaparametric commuta-

Digitized by Google

two factors, each of which is defined by a matrix whose elements are functions of six letters; and these letters, being a, b, c, f, g, h and f', g', h', a', b', c' respectively, satisfy the conditions:

$$\frac{a}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} = \frac{h'}{h},$$
$$af + bg + ch = a'f' + b'g' + c'h' = 0.$$

5. Interpreted as homogeneous coordinates, w, x, y, z (¹) represent a point in elliptic or hyperbolic space, provided a condition of the form

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = k^2$$

be satisfied. If then

$$\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 & z_0 \\ \omega_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \omega_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \omega_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

be the matrix of an orthogonal transformation, the conditions

$$w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1,$$
$$\omega_i^2 + \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

being satisfied, kw_0, kx_0, ky_0, kz_0 are the coordinates of a point and ω_i, α_i, β_i, γ_i may be interpreted as the homogeneous coordinates of a plane.

An orthogonal transformation displaces the points of space (elliptic or hyperbolic) in such a way as to conserve all distances between pairs of points and all angles between pairs of planes, a fact which may be verified by showing that the transformation in question leaves unchanged all functions of the forms

$$ww' + xx' + yy' + zz', \quad \omega\omega' + \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$$

In other words, an orthogonal transformation is a movement, without distortion, of space in itself.

6. The general orthogonal transformation with six independent parameters leaves no point undisturbed; all points move. In fact the necessary and sufficient condition in order that a point (w, x, y, z) may remain fixed, when the Cayleyan transformation whose parameters are

(¹) They may also be interpreted as representing points equidistant from the origin in a parabolic four-dimensional space.

Digitized by Google

a, b, c, f, g, h is applied to it, is

$$\begin{aligned}
-(\theta^2+a^2+b^2+c^2)w+(A+a+f\theta)x+(B+b+g\theta)y+(C+c+h\theta)z&=0,\\
(A-a-f\theta)w-(\theta^2+a^2+g^2+h^2)x+(H-h-c\theta)y+(G+g+b\theta)z&=0,\\
(B-b-g\theta)w+(H+h+c\theta)x-(\theta^2+b^2+h^2+f^2)y+(F-f-a\theta)z&=0,\\
(C-c-h\theta)w+(G-g-b\theta)x+(F+f+a\theta)y-(\theta^2+c^2+f^2+g^2)z&=0,
\end{aligned}$$

or, expressed in another form, it is $\Delta =$ determinant of the coefficients of these equations $= 0$. But it is easily verified that

$$\begin{vmatrix}
-(\theta^2+a^2+b^2+c^2) & A+a+f\theta & B+b+g\theta & C+c+h\theta\\
A-a-f\theta & -(\theta^2+a^2+g^2+h^2) & H-h-c\theta & G+g+b\theta\\
B-b-g\theta & H+h+c\theta & -(\theta^2+b^2+h^2+f^2) & F-f-a\theta\\
C-c-h\theta & G-g-b\theta & F+f+a\theta & -(\theta^2+c^2+f^2+g^2)
\end{vmatrix}$$

$$\equiv\begin{vmatrix}
\theta & a & b & c\\
-a & \theta & -h & g\\
-b & h & \theta & -f\\
-c & -g & f & \theta
\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}
1 & f & g & h\\
-f & 1 & -c & b\\
-g & c & 1 & -a\\
-h & -b & a & 1
\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}
1 & a & b & c\\
-a & 1 & -h & g\\
-b & h & 1 & -f\\
-c & -g & f & 1
\end{vmatrix},$$

that is,

$$\Delta\equiv\theta^2K^2,$$

where θ and K have their usual meanings

$$\begin{aligned}
K&=1+a^2+b^2+c^2+f^2+g^2+h^2+\theta^2,\\
\theta&=af+bg+ch;
\end{aligned}$$

and for a real transformation K cannot be zero.

Hence, the necessary and sufficient condition for the existence of the transformation (a, b, c, f, g, h), *permitting an invariant point, is*

$$af+bg+ch=0.$$

The parameters of M and M′, the complementary factors of M_0, satisfy this condition, and the corresponding transformations are therefore characterized by the existence of invariant points.

7. The condition $\theta = 0$ being satisfied, the coordinates of all the invariant points of the transformation (a, b, c, f, g, h) satisfy the equations

$$\begin{aligned}
-(a^2+b^2+c^2)w+(A+a)x+(B+b)y+(C+c)z&=0,\\
(A-a)w-(a^2+g^2+h^2)x+(H-h)y+(G+g)z&=0,\\
(B-b)w+(H+h)x-(b^2+h^2+f^2)y+(F-f)z&=0,\\
(C-c)w+(G-g)x+(F+f)y-(c^2+f^2+g^2)z&=0.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

With their terms rearranged these equations are

$$\begin{aligned} \Phi - a\xi - b\eta - c\zeta &= 0, \\ a\Phi + \xi - h\eta + g\zeta &= 0, \\ b\Phi + h\xi + \eta - f\zeta &= 0, \\ c\Phi - g\xi + f\eta + \zeta &= 0, \end{aligned}$$

where

$$\Phi, \xi, \eta, \zeta = ax + by + cz, \quad aw + hy - gz, \quad bw - hx + fz, \quad cw + gx - fy,$$

and since K is not zero, φ, ξ, η, ζ must separately vanish; that is w, x, y, z satisfy the equations

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \qquad bw - hx + fz = 0, \\ aw + hy - gz &= 0, \qquad cw + gx - fy = 0. \end{aligned}$$

These equations represent four planes whose common points of intersection, if there be such, are the invariant points of the transformation.

But in consequence of the condition $\Theta = 0$, the first of the four equations is derivable from any two of the others by the elimination of w, and

$$f(aw + hy - gz) + g(bw - hx + fz) + h(cw + gx - fy) \equiv 0.$$

Hence the four planes meet in a straight line, all the points of which remain undisturbed by the transformation; and the investigation has shown that there are no other invariant points. We may take, as the equations of the invariant straight line,

$$\begin{gathered} ax + by + cz = 0, \\ a(aw + hy - gz) + b(bw - hx + fz) + c(cw + gx - fy) = 0, \end{gathered}$$

that is

$$ax + by + cz = 0, \qquad \mathrm{I}w - \mathrm{A}x - \mathrm{B}y - \mathrm{C}z = 0,$$

where

$$\mathrm{I} = a^2 + b^2 + c^2, \qquad \mathrm{A} = bh - cg, \qquad \mathrm{B} = cf - ah, \qquad \mathrm{C} = ag - bf.$$

Interpreted as motion this result is :

If the condition $af + bg + ch = 0$ be satisfied, the transformation (a, b, c, f, g, h) represents a rotation about a fixed axis whose equations are :

$$ax + by + cz = 0. \qquad \mathrm{I}w - \mathrm{A}x - \mathrm{B}y - \mathrm{C}z = 0.$$

The Plückerian coordinates of this axis are :

$$-a, \quad -b, \quad -c, \quad f, \quad g, \quad h,$$

Digitized by Google

8. By substitution in the equations of transformation it is shown that the points (o, f, g, h), $(f^2+g^2+h^2, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ lie in the axis of the transformation $(a, b, c, f, g, h; \Theta = 0)$.

Write

$$\mathrm{J} = f^2+g^2+h^2, \qquad \mathrm{I} = a^2+b^2+c^2.$$

If the coordinates of the origin, which are k, 0, 0, 0, are changed by this transformation into kw_0, kx_0, ky_0, kz_0, the equations

$$\begin{vmatrix} w & x & y & z \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & g & h \\ \mathrm{J} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} w & x & y & z \\ w_0 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & f & g & h \\ \mathrm{J} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix} = 0,$$

represent a pair of planes meeting in the axis, the first of which is, by the same transformation, changed into the second. Expanded and reduced, the first of these equations is

$$ax + by + cz = 0.$$

The coefficients in the second equation are

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ f & g & h \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} w_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & g & h \\ \mathrm{J} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & z_0 \\ 0 & f & h \\ \mathrm{J} & \mathrm{A} & \mathrm{C} \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ 0 & f & g \\ \mathrm{J} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{vmatrix},$$

or, in their expanded forms,

$$\begin{aligned}
x_0(\mathrm{C}g - \mathrm{B}h) + y_0(\mathrm{A}h - \mathrm{C}f) + z_0(\mathrm{B}f - \mathrm{A}g) &= \mathrm{J}(ax_0 + by_0 + cz_0), \\
w_0(\mathrm{B}h - \mathrm{C}g) + y_0(0 - \mathrm{J}h) + z_0(\mathrm{J}g - 0) &= \mathrm{J}(-aw_0 - hy_0 + gz_0), \\
w_0(\mathrm{C}f - \mathrm{A}h) + x_0(\mathrm{J}h - 0) + z_0(0 - \mathrm{J}f) &= \mathrm{J}(-bw_0 + hx_0 - fz_0), \\
w_0(\mathrm{A}g - \mathrm{B}f) + x_0(0 - \mathrm{J}g) + y_0(\mathrm{J}f - 0) &= \mathrm{J}(-cw_0 - gx_0 + fy_0).
\end{aligned}$$

But in the equations of transformation the values of $\mathrm{K}w_0$, $\mathrm{K}x_0$, $\mathrm{K}y_0$, $\mathrm{K}z_0$, are respectively $\mathrm{K} - 2\mathrm{I}$, $2(\mathrm{A}+a)$, $2(\mathrm{B}+b)$, $2(\mathrm{C}+c)$, and therefore

$$\begin{aligned}
ax_0 + by_0 + cz_0 &= 2a(\mathrm{A}+a) + 2b(\mathrm{B}+b) + 2c(\mathrm{C}+c) = 2\mathrm{I}, \\
-aw_0 - hy_0 + gz_0 &= -a\mathrm{K} + 2a(\mathrm{I}+\mathrm{J}) - 2\mathrm{A} &&= a\mathrm{K} - 2(\mathrm{A}+a), \\
-bw_0 + hx_0 - fz_0 &= -b\mathrm{K} + 2b(\mathrm{I}+\mathrm{J}) - 2\mathrm{B} &&= b\mathrm{K} - 2(\mathrm{B}+b), \\
-cw_0 - gx_0 + fy_0 &= -c\mathrm{K} + 2c(\mathrm{I}+\mathrm{J}) - 2\mathrm{C} &&= c\mathrm{K} - 2(\mathrm{C}+c).
\end{aligned}$$

By these substitutions the equation of the second plane becomes

$$2\mathrm{I}w + (a\mathrm{K} - 2a - 2\mathrm{A})x + (b\mathrm{K} - 2b - 2\mathrm{B})y + (c\mathrm{K} - 2c - 2\mathrm{C})z = 0,$$

or this may be written

$$(\mathrm{K} - 2)(ax + by + cz) + 2(\mathrm{I}w - \mathrm{A}x - \mathrm{B}y - \mathrm{C}z) = 0,$$

Digitized by Google

a form which shows at once that the plane in question passes through the intersection of the two planes

$$ax + by + cz = 0, \qquad \mathrm{I}w - \mathrm{A}x - \mathrm{B}y - \mathrm{C}z = 0,$$

that is, through the axis of the rotation.

The angular displacement of the rotation is the angle between the two planes

$$ax + by + cz = 0,$$
$$\omega w + \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

where

$$\omega, \alpha, \beta, \gamma = 2\mathrm{I}, \qquad a\mathrm{K} - 2a - 2\mathrm{A}, \quad b\mathrm{K} - 2b - 2\mathrm{B}, \quad c\mathrm{K} - 2c - 2\mathrm{C}.$$

Let the expression for the cosine of this angle be now formed. For this purpose the coefficients, which are proportional to the coordinates of the two planes, must be multiplied by proportionality factors, ρ and σ, determined by the conditions

$$\rho^2(a^2 + b^2 + c^2) = 1,$$
$$\sigma^2(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 1,$$

from which are derived the values

$$\rho^2 = \frac{1}{\mathrm{I}}, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{I}\mathrm{K}^2}.$$

The required expression for the cosine of the angle between the two planes is

$$\cos\Phi = -\rho\sigma(0.\omega + a\alpha + b\beta + c\gamma)$$
$$= -\rho\sigma[(\mathrm{K} - 2)\mathrm{I} - 2(a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C})],$$

that is

$$\cos\Phi = \frac{2 - \mathrm{K}}{\mathrm{K}} = \frac{1 - a^2 - b^2 - c^2 - f^2 - g^2 - h^2}{1 + a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2}.$$

But

$$\cos\Phi = \frac{1 - \tan^2\frac{1}{2}\Phi}{1 + \tan^2\frac{1}{2}\Phi};$$

$$\therefore \qquad \tan^2\tfrac{1}{2}\Phi = a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2,$$

or

$$\sec^2\tfrac{1}{2}\Phi = \mathrm{K} \text{ (1)}.$$

The angular displacement of the rotation is hereby given in terms of the parameters.

---

(1) *Cf.* RODRIGUES, *loc. cit.*, p. 402, and CAYLEY, *Crelle's Journal*, XXXII, p. 121.

Digitized by Google

9. It is immediately evident that the transformation complementary to $(a, b, c, f, g, h;\ \Theta = 0)$, whose matrix is M′ and which, in the notation here employed, is denoted by $(f', g', h', a', b', c';\ \Theta' = 0)$, represents also a rotation about a fixed axis and that this axis has for its equations

$$fx + gy + hz = 0, \qquad Jw + Ax + By + Cz = 0,$$

or, as its Plückerian coordinates,

$$f,\quad g,\quad h,\quad -a,\quad -b,\quad -c.$$

The angular displacement of the rotation is given by either of the formula :

$$\cos\Phi' = \frac{2 - K'}{K'}, \qquad \sec^2 \tfrac{1}{2}\Phi' = K' = 1 + r^2(K - 1).$$

10. A special and interesting form of the matrix (MM′) of art. 3 is obtained by making $r = 1$. This matrix becomes, when $a' = a$, $b' = b$, etc.

$$(MM') = \begin{vmatrix} \cos\Phi & \lambda & \mu & \nu \\ -\lambda & \cos\Phi & -\nu & \mu \\ -\mu & \nu & \cos\Phi & -\lambda \\ -\nu & -\mu & \lambda & \cos\Phi \end{vmatrix},$$

where

$$\cos\Phi, \lambda, \mu, \nu = \frac{2 - K}{K}, \qquad 2\frac{a + f}{K}, \qquad 2\frac{b + g}{K}, \qquad 2\frac{c + h}{K}.$$

The coefficients of the transformation now satisfy the relation

$$\cos^2\Phi + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Hence, if i, j, k be the three imaginary quaternion units, we may write

$$q = \cos\Phi - i\lambda - j\mu - k\nu,$$

and q is a quaternion whose tensor is unity. Let

$$p = w + ix + jy + kz;$$

then

$$\begin{aligned} pq = {} & w\cos\Phi + \lambda x + \mu y + \nu z \\ & + i(-\lambda w + x\cos\Phi - \nu y + \mu z) \\ & + j(-\mu w + \nu x + y\cos\Phi - \lambda z) \\ & + k(-\nu w - \mu x + \lambda y + z\cos\Phi). \end{aligned}$$

Digitized by Google

Thus regressive multiplication of p by the quaternion q produces identically the same result as the triparametric orthogonal transformation $(\cos\Phi, \lambda, \mu, \nu)$ applied to the point (w, x, y, z) (¹). This is only a particular case of the identity of result obtained through multiplication by quaternions and transformation by matrices of the fourth order. The general quaternion form of the orthogonal transformation with six parameters is qpq', where q and q' are unit quaternions, but otherwise independent of one another. But the discussion of this phase of my subject lies outside the proper scope of this paper.

11. The general conclusion to which this investigation has led may be summed up in the following statement (²) :

The orthogonal transformation with six independent parameters, when interpreted geometrically, represents a motion, without distortion, of elliptic or hyperbolic space in itself, by which no points remain fixed; but it is at once decomposable into the product of a pair of complementary commutative transformations: $(a, b, c, f, g, h; \Theta = 0)$, $(f', g', h', a', b', c'; \Theta' = 0)$, whose parameters satisfy the conditions :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} = \frac{h'}{h},$$
$$af + bg + ch = a'f' + b'g' + c'h' = 0,$$

and which represent rotations about a pair of axes that remain alternately fixed. The equations of these axes are respectively

$$ax + by + cz = 0, \qquad \mathrm{I}w - \mathrm{A}x - \mathrm{B}y - \mathrm{C}z = 0 \qquad \text{(the I-axis)},$$

and

$$fx + gy + hz = 0. \qquad \mathrm{J}w + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 0 \qquad \text{(the J-axis)},$$

and the angular displacements of the two rotations are respectively

$$\Phi = \cos^{-1}\frac{2 - \mathrm{K}}{\mathrm{K}}, \qquad \Phi' = \cos^{-1}\frac{2 - \mathrm{K}'}{\mathrm{K}'}.$$

12. The following dualistic relations, here announced without proof, may be verified without difficulty :

(¹) *Cf.* STUDY, *loc. cit.*, p. 351; HAUSDORFF, *loc. cit.*, p. 200.
(²) *Cf.* LINDEMANN, *loc. cit.*, § 3 et 4.

Digitized by Google

(a). A rotation about the I-axis displaces the plane

$$fx + gy + hz = 0$$

in itself about the fixed point (J, A, B, C), and a rotation about the J-axis displaces the plane

$$ax + by + cz = 0$$

in itself about the fixed point (I, — A, — B, — C).

(b). The planes $ax + by + cz = 0$ and $fx + gy + hz = 0$ are perpendicular to one another. Their line of intersection passes through the origin and meets the two axes (the I and the J axes) at the points (J, A, B, C) and (I, — A, — B, — C) respectively.

(c). The I-axis meets the plane $fx + gy + hz = 0$ perpendicularly at the point (J, A, B, C) and the J-axis meets the plane $ax + by + cz = 0$ perpendicularly at the point (I, — A, — B, — C).

(d). The conditions $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$ being satisfied, a, b, c, f, g, h and f', g', h', a', b'. c' are the Plückerian coordinates of straight lines; the former lies in the plane $fx + gy + hz = 0$, the latter in the plane $ax + by + cz = 0$, and both therefore meet the intersection line of these two planes.

(e). A rotation about the I-axis displaces the line (a, b, c, f, g, h) in itself and a rotation about the J-axis displaces the line (f', g', h', a', b', c') in itself.

(f). The distances from the origin, along the intersection of the planes $fx + gy + hz = 0$, $ax + by + cz = 0$, to the points (J, A, B, C) and (I, — A, — B, — C) being denoted by OP and OQ respectively and $\cos_k u$ being defined by

$$\cos_k u = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{iu}{k}} + e^{-\frac{iu}{k}}\right),$$

these distances are determined by the formulae :

$$\cos_k \mathrm{OP} = \sqrt{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K} - \mathrm{I}}}, \qquad \cos_k \mathrm{OQ} = \sqrt{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{K} - \mathrm{I}}},$$

and the perpendicular distance between the two axes is

$$\mathrm{OP} + \mathrm{OQ} = \tfrac{1}{2} k\pi.$$

Digitized by Google

SUR

LE THÉORÈME DE M. SALMON,

CONCERNANT LES CUBIQUES PLANES,

PAR M. V. JAMET,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE MARSEILLE.

Je me propose de soumettre au Congrès une démonstration de cette proposition bien connue : *Les quatre tangentes à une cubique plane, issues d'un point de la courbe, et différentes de la tangente en ce point, ont un rapport anharmonique constant.* Si cette démonstration présente quelque intérêt, ce sera probablement sur le point suivant : le calcul auquel elle conduit permet d'intégrer complètement une certaine équation différentielle du second ordre, où interviennent les fonctions elliptiques. J'ai d'ailleurs donné quelques indications sur ce point, dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (1890); j'ajoute cependant, que, dans l'intégration en question, j'avais déjà été précédé par M. Appell. Je demande à Messieurs les Membres du Congrès de vouloir bien accueillir favorablement la suite des calculs dont je n'ai jamais publié les détails.

1. On sait que l'étude des propriétés projectives des cubiques peut toujours être ramenée à l'étude de l'équation

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + e, \tag{1}$$

car l'équation d'une cubique se ramène toujours à cette forme, par des transformations homographiques. Supposons donc que l'équation (1) représente une cubique, et soit

$$y = mx + n, \tag{2}$$

l'équation d'une droite. Pour que celle-ci soit tangente à la cubique, il faut et il suffit que l'équation

$$(mx + n)^2 = ax^3 + bx^2 + cx + e \tag{3}$$

Digitized by Google

ait une racine double; soit x cette racine, et soit ξ l'abscisse du point où la droite (2) coupe la courbe; ξ est la racine simple de l'équation (2). En vertu des relations entre les coefficients et les racines d'une même équation, on trouvera

$$a(2\xi + x) = m^2 - b,$$
$$ax^2\xi = n^2 - e,$$

puis, par l'élimination de x,

$$\frac{4a}{\xi} = \frac{(m^2 - b - a\xi)^2}{n^2 - e}. \tag{4}$$

2. Soit, d'ailleurs,

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + e.$$

De ce que l'équation (3) admet la racine ξ résulte l'égalité

$$m\xi + n = \pm\sqrt{f(\xi)},$$

et l'on peut transformer comme il suit l'égalité (4)

$$4a\left[(\pm\sqrt{f(\xi)} - m\xi)^2 - e\right] = (m^2 - b - a\xi)^2\xi.$$

Il en résulte

$$4a\left[a\xi^2 + b\xi + c \mp 2m\sqrt{f(\xi)} + m^2\xi\right] = (m^2 - b - a\xi)^2 \tag{5}$$

ou bien encore, en désignant par u une constante, provisoirement indéterminée

$$\begin{aligned}(m^2 - b - a\xi + u)^2 = (4a\xi + 2u)m^2 \mp 8am\sqrt{f(\xi)} \\ + 4a(a\xi^2 + b\xi + c) - 2(b + a\xi)u + u^2.\end{aligned} \tag{6}$$

L'introduction de cette constante a pour but de former une résolvante de l'équation (5), où l'inconnue est m. En effet, déterminons u de telle sorte que le second membre de (6) soit le carré d'un binome du premier degré en m; nous trouvons

$$-16a^2f(\xi) + (4a\xi + 2u)[4a(a\xi^2 + b\xi + c) - 2(b + a\xi)u + u^2] = 0.$$

et cette équation présente une particularité remarquable : si on l'ordonne par rapport aux puissances de u, on trouve une équation du troisième degré, *dont les coefficients sont indépendants de* ξ.

C'est l'équation suivante

$$u^3 - 2bu^2 + 4acu - 8a^2e = 0;$$

Digitized by Google

et si l'on pose $u = -2a\alpha$, on la transforme comme il suit

$$a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + e = 0,$$

ou bien

$$f(\alpha) = 0.$$

3. Soit donc

$$f(\xi) = a(\xi - \alpha)(\xi - \beta)(\xi - \gamma),$$

et soit, dans ce qui précède,

$$u = -2a\alpha.$$

L'équation (6) devient

$$[m^2 - a(\xi + \beta + \gamma - \alpha)]^2 = 4a(\xi - \alpha)m^2 \pm 8am\sqrt{a(\xi - \alpha)(\xi - \beta)(\xi - \gamma)} + 4a[a\xi^2 + (a\alpha + b)\xi + a\alpha^2 + b\alpha + c]$$

ou bien

$$[m^2 - a(\xi + \beta + \gamma - \alpha)]^2 = 4a\left(\sqrt{\xi - \alpha}\, m \mp \sqrt{(\xi - \beta)(\xi - \gamma)}\right)^2.$$

Si l'on considère, en particulier, l'un des points de la cubique dont l'abscisse est égale à ξ, on peut écrire le signe — seulement, au lieu du double signe, devant le deuxième radical qui figure dans cette équation ; d'ailleurs il est possible de la résoudre par rapport à m, et l'on trouve, en désignant ses racines par m_1, m_2, m_3, m_4 :

$$\begin{aligned}
m_1 &= \sqrt{a}\left(\sqrt{\xi - \alpha} + \sqrt{\xi - \beta} - \sqrt{\xi - \gamma}\right),\\
m_2 &= \sqrt{a}\left(\sqrt{\xi - \alpha} - \sqrt{\xi - \beta} + \sqrt{\xi - \gamma}\right),\\
m_3 &= \sqrt{a}\left(-\sqrt{\xi - \alpha} + \sqrt{\xi - \beta} + \sqrt{\xi - \gamma}\right),\\
m_4 &= -\sqrt{a}\left(\sqrt{\xi - \alpha} + \sqrt{\xi - \beta} + \sqrt{\xi - \gamma}\right),
\end{aligned}$$

Puis on vérifie que le rapport anharmonique $(m_1 m_2 m_3 m_4)$ est indépendant de ξ. En effet,

$$\frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2} = \frac{\sqrt{\xi - \alpha} + \sqrt{\xi - \gamma}}{\sqrt{\xi - \alpha} + \sqrt{\xi - \beta}}.$$

$$\frac{m_4 - m_1}{m_4 - m_2} = \frac{-\sqrt{\xi - \alpha} + \sqrt{\xi - \beta}}{-\sqrt{\xi - \alpha} + \sqrt{\xi - \gamma}}.$$

En divisant ces deux égalités membre à membre, on trouve

$$(m_1 m_2 m_3 m_4) = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta},$$

ce qui démontre le théorème de M. Salmon, énoncé au début de ce travail.

Digitized by Google

4. D'après une proposition connue, les quatre fonctions de ξ, désignées par m_1, m_2, m_3, m_4, sont quatre intégrales d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{dm}{d\xi} + A + Bm + Cm^2 = 0,$$

où A, B, C désignent les fonctions de ξ (*voir*, par exemple, le Mémoire de M. Picard, inséré aux *Annales de l'École Normale supérieure*, 1877, sur l'application de la théorie des complexes linéaires, etc.).

Proposons-nous d'établir cette équation. A cet effet, observons que la racine double, x, de l'équation

$$(3) \qquad (mx+n)^2 = ax^3 + bx^2 + cx + e$$

vérifie aussi l'équation dérivée

$$(7) \qquad 2m(mx+n) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Différentiant l'équation (3) et tenant compte de l'équation (7), on trouve

$$(8) \qquad x\frac{dm}{d\xi} + \frac{dn}{d\xi} = 0.$$

Mais on a aussi

$$(m\xi+n)^2 = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + e$$

et l'on en déduit

$$2m(2\xi+n) + 2(m\xi+n)\left(\xi\frac{dm}{d\xi} + \frac{dn}{d\xi}\right) = 3a\xi^2 + 2b\xi + c,$$

puis, en vertu de (8)

$$(9) \qquad 2m(m\xi+n) + 2(m\xi+n)(\xi-x)\frac{dm}{d\xi} = 3a\xi^2 + 2b\xi + c.$$

Retranchant (9) et (7) membre à membre, on trouve :

$$2m^2(\xi-x) + 2(m\xi+n)(\xi-x)\frac{dm}{d\xi} = 3a(\xi-x)(\xi+x) + 2b(\xi-x),$$

ou bien

$$2m^2 + 2(m\xi+n)\frac{dm}{d\xi} = 3a(\xi+x) + 2b,$$

ou encore

$$2m^2 + 2m\sqrt{f(\xi)}\frac{dm}{d\xi} = 3a(\xi+x) + 2b.$$

Mais

$$a(2x+\xi) = m^2 - b,$$

Digitized by Google

comme il a été dit précédemment. On en conclut

$$2m^2 + 2m\sqrt{f(\xi)}\,\frac{dm}{d\xi} = \frac{3}{2}(a\xi + m^2 - b) + 2b,$$

ou bien

$$4\sqrt{f(\xi)}\,\frac{dm}{d\xi} = m^2 + 3a\xi + b,$$

et telle est l'équation différentielle que nous voulions établir.

5. D'après ce qui précède, on connaît déjà quatre intégrales particulières de cette équation; on sait d'ailleurs qu'il suffit d'en connaître trois pour trouver, sans intégration, l'intégrale générale de l'équation proposée. Si l'on désigne par C une constante arbitraire, par m l'intégrale cherchée, par m_i, m_h, m_k trois des fonctions m_1, m_2, m_3, m_4 antérieurement définies, la fonction m est définie par l'équation

$$(m\,m_i\,m_h\,m_k) = \mathrm{C}.$$

En outre, et c'est là le fait sur lequel nous voulons insister, la connaissance des fonctions m_1, m_2, m_3, m_4 permet de connaître l'intégrale générale d'une certaine équation différentielle du second ordre, intéressante en ce qu'elle est au cas particulier de l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (\mathrm{A}\,\mathrm{sn}^2 t + \mathrm{B})z,$$

à laquelle Lamé, dans un Mémoire célèbre, ramène le problème de l'équilibre de température sur un ellipsoïde. En effet, posons

$$\xi = \beta\,\mathrm{sn}^2 t + \gamma\,\mathrm{cn}^2 t,$$

sn et cn désignant les fonctions elliptiques que l'on sait, avec cette condition que leur module k est défini comme il suit :

$$k^2 = \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}.$$

Nous trouvons

$$\xi - \alpha = (\beta - \gamma)\,\mathrm{sn}^2 t - (\alpha - \gamma) = (\gamma - \alpha)\left[1 - \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}\,\mathrm{sn}^2 t\right] = (\gamma - \alpha)\,dn^2 t,$$

$$\xi - \beta = (\gamma - \beta)\,\mathrm{cn}^2 t \qquad \xi - \gamma = (\beta - \gamma)\,\mathrm{sn}^2 t.$$

(10) $$\sqrt{(\xi - \alpha)(\xi - \beta)(\xi - \gamma)} = \sqrt{(\alpha - \gamma)}(\beta - \gamma)\,\mathrm{sn}\,t\,\mathrm{cn}\,t\,\mathrm{dn}\,t,$$

(11) $$d\xi = 2(\beta - \gamma)\,\mathrm{sn}\,t\,\mathrm{cn}\,t\,\mathrm{dn}\,t$$

Digitized by Google

et l'équation différentielle ci-dessus se transforme comme il suit :

$$2\sqrt{a(\alpha-\gamma)}\,\frac{dm}{dt}+m^2=(\gamma-\alpha)a(-3k^2\,\mathrm{sn}^2 t+1+k^2).$$

Soit encore

$$m=2\sqrt{a(\alpha-\gamma)}\,\mu.$$

On trouve

$$\frac{d\mu}{dt}+\mu^2=\frac{3}{4}k^2\,\mathrm{sn}^2 t-\frac{1+k^2}{4},$$

puis, en faisant

$$z=e^{\int\mu\,dt},$$

on trouve encore

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\left(\frac{3}{4}k^2\,\mathrm{sn}^2 t-\frac{1+k^2}{4}\right)z, \tag{12}$$

et telle est l'équation différentielle du second ordre que nous voulions établir [1]

6. Nous connaissons déjà quatre intégrales particulières de cette équation. En effet, si nous posons

$$m_i=2\sqrt{a(\alpha-\gamma)}\,\mu_i,\qquad (i=1,2,3,4),$$

l'équation (12) admettra les quatre intégrales définies par la formule

$$z_i=e^{\int\mu_i dt},$$

en supposant que les fonctions m_1, m_2, m_3, m_4, qui nous servent à définir μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, soient les racines, antérieurement calculées, de l'équation (5). Deux de ces intégrales particulières nous suffiront pour trouver l'intégrale générale de (10); c'est pourquoi nous voulons étudier en particulier l'une au moins de ces intégrales. Nous trouverons, par exemple,

$$z_1=e^{\int\mu_1 dt}=e^{\int\frac{\sqrt{\xi-\alpha}+\sqrt{\xi-\beta}-\sqrt{\xi-\gamma}}{2\sqrt{\alpha-\gamma}}dt}.$$

Or, en vertu des formules (10) et (11)

$$\frac{2\,dt}{\sqrt{\alpha-\gamma}}=\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)(\xi-\gamma)}}$$

---

[1] Depuis que ce Travail a été livré à l'impression, nous avons reconnu que l'emploi des notations de Weierstrass permet de présenter tout le calcul qui suit sous une forme bien plus élégante.

Digitized by Google

et

$$z_1 = e^{\frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{\xi-\alpha}+\sqrt{\xi-\beta}-\sqrt{\xi-\gamma}}{\sqrt{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)(\xi-\gamma)}}\,d\xi}$$

ou bien

$$z_1 = e^{\frac{1}{4}\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\beta)(\xi-\gamma)}} + \frac{1}{4}\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\gamma)(\xi-\alpha)}} - \frac{1}{4}\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}}}$$

En effectuant les quadratures indiquées ci-dessus, on trouve, après quelques transformations faciles

$$z_1 = \frac{\sqrt[2]{(\sqrt{\xi-\beta}+\sqrt{\xi-\gamma})(\sqrt{\xi-\alpha}+\sqrt{\xi-\gamma})}}{\sqrt[2]{\sqrt{\xi-\alpha}+\sqrt{\xi-\beta}}}$$

ou bien

$$z_1 = \frac{\sqrt{\sqrt{\gamma-\beta}\,(\mathrm{cn}\,t+i\,\mathrm{sn}\,t)(\sqrt{\gamma-\alpha}\,\mathrm{dn}\,t+\sqrt{\beta-\gamma}\,\mathrm{sn}\,t)}}{\sqrt{\sqrt{\gamma-\alpha}\,\mathrm{dn}\,t+\sqrt{\gamma-\beta}\,\mathrm{cn}\,t}},$$

$$= \sqrt{(\gamma-\alpha)k}\,\frac{\sqrt{(\mathrm{cn}\,t+i\,\mathrm{sn}\,t)(\mathrm{dn}\,t+ik\,\mathrm{sn}\,t)}}{\sqrt{\mathrm{dn}\,t+k\,\mathrm{cn}\,t}},$$

En appliquant la même méthode au calcul des trois autres intégrales, on trouvera

$$z_2 = \sqrt{(\gamma-\alpha)k}\,\frac{\sqrt{(\mathrm{cn}\,t+i\,\mathrm{sn}\,t)(\mathrm{dn}\,t+k\,\mathrm{cn}\,t)}}{\sqrt{\mathrm{dn}\,t+ik\,\mathrm{sn}\,t}},$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{k}\,\frac{\sqrt{(\mathrm{dn}\,t+ik\,\mathrm{sin}\,t)(\mathrm{dn}\,t+k\,\mathrm{cn}\,t)}}{\sqrt{(\mathrm{cn}\,t+i\,\mathrm{sn}\,t}},$$

$$z_4 = \frac{(\gamma-\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k}}\,\frac{1}{\sqrt{(\mathrm{cn}\,t+i\,\mathrm{sn}\,t)(\mathrm{dn}\,t+ik\,\mathrm{sn}\,t)(\mathrm{dn}\,t+k\,\mathrm{cn}\,t)}}.$$

Mais nous obtiendrons encore des intégrales de la même équation différentielle, en divisant z_1 et z_2 par $\sqrt{k(\gamma-\alpha)}$, z_3 par $\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{k}$, z_4 par $\frac{(\gamma-\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k}}$. En désignant ces nouvelles intégrales par ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 nous formons le Tableau suivant :

$$\zeta_1 = \frac{\sqrt{(\mathrm{cn}\,t+i\,\mathrm{sn}\,t)(\mathrm{dn}\,t+ik\,\mathrm{sn}\,t)}}{\sqrt{\mathrm{dn}\,t+k\,\mathrm{cn}\,t}},$$

$$\zeta_2 = \frac{\sqrt{\mathrm{cn}\,t+i\,\mathrm{sn}\,t)(\mathrm{dn}\,t+k\,\mathrm{cn}\,t)}}{\sqrt{\mathrm{dn}\,t+ik\,\mathrm{sn}\,t)}},$$

$$\zeta_3 = \frac{\sqrt{(\mathrm{dn}\,t+ik\,\mathrm{sn}\,t)(\mathrm{dn}\,t+k\mathrm{cn}\,t)}}{\sqrt{\mathrm{cn}\,t+i\,\mathrm{sn}\,t}},$$

$$\zeta_4 = \frac{1}{\sqrt{(\mathrm{cn}\,t+i\,\mathrm{sn}\,t)(\mathrm{dn}\,t+ik\,\mathrm{sn}\,t)(\mathrm{dn}\,t+k\,\mathrm{cn}\,t)}},$$

Digitized by Google

et nous allons en profiter pour former d'autres intégrales (fonctions homogènes et linéaires de deux au moins des intégrales ci-dessus) qui ne renferment pas le signe i.

7. A cet effet, nous observons que l'intégrale ζ_4 est identique à

$$\frac{\sqrt{(\operatorname{cn} t - i \operatorname{sn} t)(\operatorname{dn} t - ik \operatorname{sn} t)}}{\sqrt{\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t}},$$

de sorte que les expressions de ζ_1 et de ζ_4 ne diffèrent l'une de l'autre que par le changement de $+i$ en $-i$. D'ailleurs

$$\zeta_1 \zeta_4 = \frac{1}{\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t}$$

et

$$\zeta_1^2 + \zeta_4^2 = 2 \frac{\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t - k \operatorname{sn}^2 t}{\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t}.$$

Donc

$$\zeta_1 + \zeta_4 = \sqrt{\frac{2(\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t - k \operatorname{sn}^2 t + 1)}{\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t}} \tag{13}$$

et

$$\zeta_1 - \zeta_4 = \sqrt{\frac{2(\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t - k \operatorname{sn}^2 t - 1)}{\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t}}. \tag{14}$$

On peut donc écrire l'intégrale générale de l'équation (12) sous la forme suivante :

$$z = \frac{A \sqrt{(\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t - k \operatorname{sn}^2 t + 1)} + B \sqrt{\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t - k \operatorname{sn}^2 t - 1}}{\sqrt{\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t}}, \tag{15}$$

A, B désignant deux constantes arbitraires. En multipliant les deux termes de cette dernière fraction par $\sqrt{\operatorname{dn} t - k \operatorname{cn} t}$, on donne encore à l'intégrale générale la forme ci-après :

$$z = \sqrt{\operatorname{dn} t - k \operatorname{cn} t}\left(A \sqrt{\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t - k \operatorname{sn}^2 t + 1} + B \sqrt{\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t - k \operatorname{sn}^2 t - 1}\right).$$

8. Dans tout le calcul qui précède, on a désigné par k, indifféremment, l'une ou l'autre des deux racines carrées de $\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}$. Donc, à toute intégrale de l'équation (12) doit correspondre une intégrale qui n'en diffère que par le changement de k en $-k$. On vérifie qu'il en est ainsi pour les deux intégrales ζ_1 et ζ_2; il suffit, pour y parvenir, de multiplier les deux termes de l'expression de ζ_1 par $\sqrt{\operatorname{dn} t - k \operatorname{cn} t}$, et les deux termes de l'expression de ζ_2 par $\sqrt{\operatorname{dn} t - ik \operatorname{sn} t}$. Les deux intégrales ζ_3 et ζ_4

Digitized by Google

jouissent de la même propriété. On s'en assure en multipliant les deux termes de la fraction

$$\frac{1}{\sqrt{(\operatorname{cn} t + i \operatorname{sn} t)(\operatorname{dn} t + ik \operatorname{sn} t)(\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t)}},$$

égale à ζ_4, par

$$\sqrt{\operatorname{dn} t - ik \operatorname{sn} t)(\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t)}.$$

On voit aussi que l'expression (13) que nous avons trouvée pour $\zeta_1 + \zeta_4$ correspond, d'après la même loi, à l'expression de $\zeta_1 + \zeta_2$, et, de même, l'expression (14) de $\zeta_1 - \zeta_4$ à celle de $\zeta_2 - \zeta_3$. En effet, on trouve, successivement

$$\begin{aligned}
\zeta_2 &= \sqrt{(\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t)(\operatorname{cn} t + i \operatorname{sn} t)(\operatorname{dn} t - ik \operatorname{sn} t)},\\
\zeta_3 &= \sqrt{(\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t)(\operatorname{cn} t - i \operatorname{sn} t)(\operatorname{dn} t + ik \operatorname{sn} t)};\\
\zeta_2^2 + \zeta_3^2 &= 2(\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t)(\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t + k \operatorname{sn}^2 t),\\
\zeta_2 \zeta_3 &= \operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t,
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\zeta_2 + \zeta_3 &= \sqrt{2(\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t)(\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t + k \operatorname{sn}^2 t + 1)}\\
&= \sqrt{\frac{2(\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t + k \operatorname{sn}^2 t + 1)}{\operatorname{dn} t - k \operatorname{cn} t}},
\end{aligned}\right.$$

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
\zeta_1 - \zeta_3 &= \sqrt{2(\operatorname{dn} t + k \operatorname{cn} t)(\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t + k \operatorname{sn}^2 t - 1)}\\
&= \sqrt{\frac{2(\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t + k \operatorname{sn}^2 t - 1)}{\operatorname{dn} t - k \operatorname{cn} t}}.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux dernières formules démontrent la proposition énoncée.

9. On en déduit une autre forme de l'intégrale générale de l'équation (12), savoir :

$$(18)\qquad z = \frac{A' \sqrt{\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t + k \operatorname{sn}^2 t + 1} + B' \sqrt{\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t + k \operatorname{sn}^2 t - 1}}{\sqrt{\operatorname{dn} t - k \operatorname{cn} t}};$$

et l'on sait, d'après la théorie générale des équations différentielles, que les deux formes (15) et (18) ne peuvent être distinctes. En vérifiant leur identité, nous serons conduit à une forme remarquablement simple de l'intégrale générale. Considérons, par exemple, l'expression (13) de $\zeta_1 + \zeta_4$, et écrivons sous la forme

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{2}}(\zeta_1 + \zeta_4) &= \sqrt{(\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t - k \operatorname{sn}^2 t + 1)(\operatorname{dn} t - k \operatorname{cn} t)}\\
&= \sqrt{\operatorname{cn} t \operatorname{dn}^2 t - k \operatorname{dn} t \operatorname{sn}^2 t + \operatorname{dn} t - k \operatorname{cn}^2 t \operatorname{dn} t + k^2 \operatorname{cn} t \operatorname{sn}^2 t - k \operatorname{cn} t}.
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

En tenant compte des relations

$$\mathrm{dn}^2 t + k^2 \mathrm{sn}^2 t = 1, \qquad \mathrm{sn}^2 t + \mathrm{cn}^2 t = 1,$$

nous trouverons

$$\frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{2}}(\zeta_1 + \zeta_4) = \sqrt{(1-k)(\mathrm{cn}\, t + \mathrm{dn}\, t)},$$

et ceci nous permet de conclure que l'équation (12) admet l'intégrale particulière

$$\sqrt{\mathrm{cn}\, t + \mathrm{dn}\, t}.$$

L'expression (16) de $\zeta_2 + \zeta_3$ et l'expression (13) de $\zeta_1 + \zeta_4$ ne différant l'une de l'autre que par le changement de $+k$ en $-k$, on trouvera

$$\frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{2}}(\zeta_2 + \zeta_3) = \sqrt{(1+k)(\mathrm{cn}\, t + \mathrm{dn}\, t)},$$

ce qui donne la même intégrale particulière.

Appliquons la même méthode à l'expression (14) de $\zeta_1 - \zeta_4$. Nous trouvons

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{2}}(\zeta_1 - \zeta_4) &= \sqrt{(\mathrm{cn}\, t\, \mathrm{dn}\, t - k\,\mathrm{sn}^2 t - 1)(\mathrm{dn}\, t - k\,\mathrm{cn}\, t)} \\ &= \sqrt{\mathrm{cn}\, t\, \mathrm{dn}^2 t - k\,\mathrm{dn}\, t\, \mathrm{sn}^2 t - \mathrm{dn}\, t - k\,\mathrm{cn}^2 t\, \mathrm{dn}\, t + k^2 \mathrm{sn}^2 t\, \mathrm{cn}\, t + k\,\mathrm{cn}\, t} \\ &= \sqrt{(1+k)(\mathrm{cn}\, t - \mathrm{dn}\, t)}, \end{aligned}\right.$$

et l'on trouverait de même, en vertu de (17),

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_1 - \zeta_3) = \sqrt{(1-k)(\mathrm{cn}\, t - \mathrm{dn}\, t)},$$

De là encore l'intégrale particulière de forme simple

$$\sqrt{\mathrm{cn}\, t - \mathrm{dn}\, t}.$$

En résumé, la vérification que nous venons de faire nous apprend qu'on peut écrire l'intégrale générale de l'équation (12) sous la forme simple

$$z = \mathrm{A}\sqrt{\mathrm{cn}\, t + \mathrm{dn}\, t} + \mathrm{B}\sqrt{\mathrm{cn}\, t - \mathrm{dn}\, t},$$

A, B désignant deux constantes arbitraires.

10. Enfin, le théorème d'Abel sur les intégrales des fonctions algébriques va nous permettre de trouver rapidement une forme, un peu

Digitized by Google

moins simple, il est vrai, de l'intégrale générale de l'équation (12). Observons en effet que, en vertu de la formule (10, § 5), l'ordonnée η d'un point, mobile sur la cubique donnée, peut s'exprimer comme il suit :

$$\eta = \sqrt{a}\,(\alpha - \gamma)^{\frac{3}{2}} k^2 \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t,$$

lorsque l'abscisse ξ du même point est exprimée par la formule

$$\xi = \beta \operatorname{sn}^2 t + \gamma \operatorname{cn}^2 t. \tag{21}$$

D'ailleurs, si l'on appelle ξ_1, η_1, ξ_2, η_2, ξ_3, η_3 les coordonnées des points où la cubique est coupée par une droite mobile, et si l'on observe qu'une droite qui, primitivement, coïncide avec l'axe des x peut être amenée à telle position qu'on voudra, par suite d'un mouvement continu; il résulte du théorème d'Abel que la somme

$$\int_\alpha^{\xi_1} \frac{d\xi_1}{\eta_1} + \int_\beta^{\xi_2} \frac{d\xi_2}{\eta_2} + \int_\gamma^{\xi_3} \frac{d\xi_3}{\eta_3}$$

est constante. Mais cette somme ne diffère que par un facteur constant de la somme suivante

$$\int_{\theta_1}^{t_1} dt_1 + \int_{\theta_2}^{t_2} dt_2 + \int_{\theta_3}^{t_3} dt_3,$$

θ_1, θ_2, θ_3 désignant les trois valeurs de t qui répondent à $\xi = \alpha$, $\eta = 0$, $\xi = \beta$, $\eta = 0$, et $\xi = \gamma$, $\eta = 0$.

Or, d'après la formule (21),

$$\theta_3 = 0, \qquad \theta_2 = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

En outre, on a trouvé

$$\xi - \alpha = (\gamma - \alpha) \operatorname{dn}^2 t,$$

et, d'après cette formule, ξ sera égal à α si l'on a

$$\operatorname{sn} t = \frac{1}{k},$$

et, par conséquent,

$$\theta_1 = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Soit donc $\theta_2 + \theta_3 = C$; on aura constamment

$$t_1 + t_2 + t_3 = C + m\omega + n\omega',$$

Digitized by Google

ω, ω' désignant les périodes de la fonction $\operatorname{sn} t$, qui appartiennent aussi aux fonctions ξ et η, et m et n des entiers. Si, de plus, une droite est tangente à la courbe en un point répondant à la valeur τ du paramètre t, et si l'on désigne par t la valeur de cet argument relative au point où cette tangente coupe la cubique, l'égalité précédente deviendra

$$2\tau + t = C + m\omega + n\omega',$$

De plus, on trouvera une intégrale z de l'équation proposée en supposant que dans la formule

$$z = e^{\int \mu dt},$$

dont nous avons fait usage au § 6, il y ait, entre la fonction μ et le coefficient angulaire m de la tangente à la cubique au point τ, la relation

$$m = 2\sqrt{a(\alpha - \gamma)}\,\mu.$$

Mais, en désignant par x et y les coordonnées du point de contact de cette tangente, on trouvera

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a(\alpha-\gamma)}}{2}\,\frac{d(\operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau \operatorname{dn}\tau)}{\operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau \operatorname{dn}\tau\, d\tau}.$$

d'où

$$\mu\, dt = -2\mu\, d\tau = -\frac{1}{2}\, d\log(\operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau \operatorname{dn}\tau).$$

De là l'intégrale suivante :

$$z = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau \operatorname{dn}\tau}},$$

qu'on peut transformer ainsi

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sn}\frac{C-t}{2}\operatorname{cn}\frac{C-t}{2}\operatorname{dn}\frac{C-t}{2}}},$$

la constante C étant définie comme précédemment, ou, si l'on veut, par la formule

$$C = 2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u_2)}} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

11. Pour bien établir l'indépendance de cette seconde méthode, par rapport à la première, il reste à déduire, du résultat que nous venons d'établir, une deuxième intégrale de l'équation (12 . A cet effet, rappe-

Digitized by Google

lons que, si z_1 est une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = F(t)\, z,$$

la fonction z_2, définie par la formule

$$z_2 = z_1 \int \frac{dt}{z_1^2}$$

en est une autre intégrale. Ici nous trouvons

$$z_2 = z_1 \int \operatorname{sn}\frac{C-t}{2} \operatorname{cn}\frac{C-t}{2} \operatorname{dn}\frac{C-t}{2}\, dt = -2z \int \operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau \operatorname{dn}\tau\, d\tau = z_1(-\operatorname{sn}^2\tau + C'),$$

C' désignant une constante arbitraire. Nous pouvons donc adopter, pour deuxième intégrale particulière,

$$z_2 = z_1 \operatorname{sn}^2\tau, \qquad \text{ou} \qquad z_2 = \operatorname{sn}^2\frac{C-t}{2}\, z_1$$

et, par suite, écrire l'intégrale générale trouvée sous la forme

$$z = \frac{A + B \operatorname{sn}^2 \dfrac{C-t}{2}}{\sqrt{\operatorname{sn}\dfrac{C-t}{2} \operatorname{cn}\dfrac{C-t}{2} \operatorname{dn}\dfrac{C-t}{2}}},$$

en désignant les deux constantes arbitraires par A et par B.

Digitized by Google

Digitized by Google

UN NOUVEAU SYSTÈME DE DÉFINITIONS

POUR

LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE,

PAR A. PADOA (ROME).

1. Études précédentes.

La signification de quelques-uns des *symboles* qu'on rencontre en *Géométrie* doit être présupposée, même si l'on présuppose celle des symboles qui appartiennent à la *Logique pure* (1).

Comme il y a de l'*arbitraire* dans le *choix* des *symboles non définis*, il faut énoncer le *système choisi* (2).

(1) Presque toujours on identifie une *chose* avec son *nom* (on dit, par exemple : Paris *est* une ville, et non Paris *est le nom d'*une ville), une *idée* avec le *symbole* (mot ou phrase, signe ou suite de signes) qui la représente, un *fait* avec la *proposition* qui l'énonce : voilà pourquoi on peut se borner à parler de *symboles* et de *propositions*.

Puisque, en Géométrie, *définir un symbole* signifie *l'exprimer par d'autres déjà considérés* et *démontrer une proposition* signifie *la déduire d'autres déjà énoncées*, l'impossibilité de *définir tous les symboles* et de *démontrer toutes les propositions* est une conséquence immédiate de la signification donnée aux mots *définir* et *démontrer*.

En ajoutant qu'il serait impossible de définir les symboles dont on fait usage en géométrie, au moyen de ceux qui appartiennent à la logique pure, nous avons affirmé que *la Géométrie est une théorie déductive particulière*, et non une branche de la Logique pure : ce que d'ailleurs tout le monde accepte sans discussion, bien que cette affirmation ne puisse pas être justifiée et n'ait pas même une signification précise, si l'on n'établit préalablement les bornes de la Logique pure [ce que nous avons tâché de faire dans une autre étude : *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une Introduction logique à une théorie déductive quelconque* (*Bibliothèque du Congrès international de Philosophie*, Paris, Armand COLIN, 1900, p. 309-365)].

(2) La liberté relative du choix dont nous parlons est démontrée suffisamment par cette même étude.

Digitized by Google

Nous citerons seulement *trois géomètres* qui se sont préoccupés de cette question et qui ont *réduit* successivement *le nombre des symboles non définis,* au moyen desquels (et au moyen des *symboles* qui appartiennent à la *logique pure*) on peut *définir* tous les *autres symboles* (1).

D'abord, M. Pasch, qui en 1882 (2) a réussi à définir tous les autres symboles, au moyen des quatre suivants :

1. **point**, 2. **segment** (de droite) (3),
3. **plan** (4), 4. **est superposable à**.

Ensuite, M. Peano, qui en 1889 (5) a réussi à définir *plan,* au moyen de *point* et *segment,* et qui en 1894 (6) remplaça dans le système des symboles non définis *est superposable à* par *mouvement* (7) en réduisant ce

---

(1) Il n'est pas inutile de remarquer qu'on peut répéter, à propos des *propositions* et des *démonstrations,* tout ce que nous venons d'avancer au sujet des *symboles* et des *définitions.* [En effet : Parmi les *propositions* (définitions exceptées) qu'on rencontre en *Géométrie,* il y en a nécessairement qui ne sont pas *démontrées,* même en présupposant celles qui appartiennent à la *logique pure* (axiomes). Comme il y a de l'arbitraire dans leur choix, il faut énoncer *le système choisi des propositions non démontrées* (postulats), au moyen desquelles (et au moyen des *axiomes* et des *définitions*) on peut *démontrer* toutes les *autres propositions.*] Malgré cette frappante analogie entre leur rôle, la préoccupation du choix des *postulats* est très ancienne, tandis que la préoccupation du choix des *symboles non définis* est tout à fait moderne. Sans en donner une démonstration *historique,* qui nous semble superflue, nous en donnons une *philologique,* moins banale qu'elle peut paraître : Pour remplacer la phrase *proposition non démontrée,* il y a le mot *postulat,* mais on n'a pas encore inventé un *mot* pour remplacer la phrase *symbole non défini,* car cette phrase a été employée si peu jusqu'à présent, qu'on n'a pas trouvé nécessaire de l'abréger.

(2) *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Teubner, Leipzig.

(3) On doit donner au mot *segment* sa signification *élémentaire* et non sa signification *projective;* par conséquent, deux points sont toujours les extrêmes d'un *seul* segment.

Si a et b sont des points distincts, au lieu de la *figure continue* « segment ab », on peut considérer d'abord (comme symbole non défini) la *relation entre trois points* « x est un point placé entre a et b, » grâce à laquelle on peut donner cette *définition* : « segment ab » signifie « figure à laquelle appartiennent a, b et tous les points x qui sont placés entre a et b. »

(4) Même seulement *partie finie d'un plan.*

(5) *I principii di geometria, logicamente esposti.* Bocca, Torino.

(6) *Sui fondamenti della geometria* (*Revue de Mathématiques,* Turin).

(7) Au lieu de considérer l'*infinité des positions successives* d'une *figure* en *mouvement,* il ne faut considérer que sa *première* et sa *dernière position.*

Si a est un *point* (ou une *figure*) et si m est un *mouvement,* on représente par

Digitized by Google

système aux symboles :

1. point, 2. segment, 3. mouvement.

Enfin, M. Pieri, qui en 1899 (1) a réussi à définir *segment,* au moyen de *point* et *mouvement.*

Par conséquent, *tous les symboles qu'on rencontre dans la Géométrie euclidienne peuvent être définis à l'aide de deux seuls d'entre eux,* savoir

1. point, 2. mouvement (2).

2. Question.

Maintenant, on peut se poser cette question : *Pour simple que soit le système de symboles non définis choisi par M. Pieri, est-ce qu'on ne pourrait en trouver un plus simple encore?*

Il faut d'abord préciser cette question, en ôtant à la *simplicité* dont il s'agit son caractère de *relativité* et de *subjectivité.*

Chaque mouvement, selon MM. Peano et Pieri, est une fonction qui transforme d'une certaine manière les points en points. Or, puisque :

---

ma ce que devient le point (ou la figure) *a* après le mouvement *m*. En d'autres termes, il faut considérer *chaque mouvement* comme *un signe particulier* de *fonction* qui transforme les *points* en *points.*

Le *lien logique* entre le *quatrième symbole non défini* de M. Pasch et le *troisième* de M. Peano devient alors évident : on peut *les définir l'un par l'autre,* à l'aide du *premier* seulement.

En effet, la signification du symbole *est superposable à* étant présupposée : « *m* est un mouvement » signifie « *m* est un signe de fonction qui transforme chaque figure en une figure qui est superposable à la figure donnée » ;

Et réciproquement, la signification du symbole *mouvement* étant présupposée : si *a* et *b* sont des figures, alors « *a* est superposable à *b* » signifie : « il existe au moins un mouvement *m* tel que *ma* coïncide avec *b* ».

(1) *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo* (*Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino*).

(2) Il paraît que tout ce que je viens de rappeler est très peu connu, car dans plusieurs ouvrages qui ont pour but l'analyse des principes de la Géométrie, on rencontre un nombre bien plus grand de symboles non définis. Voir, par exemple :

KILLING, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie,* 1898,
HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* 1900,
ENRIQUES, *Questioni riguardanti la geometria elementare,* 1900.

Ce qui, évidemment, n'empêche pas que ces ouvrages puissent être intéressants à d'autres points de vue.

Digitized by Google

1° le nombre des points distincts est infini; 2° il y a au moins un mouvement qui transforme un point donné en un autre point donné; 3° deux mouvements qui transforment différemment le même point sont distincts; on en déduit que le nombre des mouvements distincts est infini; et, par conséquent, *mouvement* est *la classe à laquelle appartient un nombre infini de fonctions déterminées* (mouvements), et *chacune de ces fonctions* est *une relation déterminée entre un nombre infini d'objets* (points).

Maintenant, nous précisons notre question : *Après avoir choisi comme primitif le symbole* point, *est-ce qu'il ne suffirait pas de choisir comme second symbole primitif* une *relation particulière entre* un nombre fini *de points?*

Nous nous proposons de justifier la *réponse affirmative* que nous croyons pouvoir donner à cette *question*.

3. Introduction.

Nos seuls symboles non définis sont

1. point, **2. est superposable à,**

avec cette restriction, pour le *second,* que nous *ne le définissons pas* dans le *seul* cas où il est employé entre des *couples de points* (1).

Après l'ouvrage cité de M. Pieri (n° 1), notre affirmation (n° 2) sera justifiée lorsque nous aurons *défini* le *mouvement,* au moyen de nos *symboles non définis,* ce que nous allons faire dans le n° 4, en laissant de côté toute préoccupation *didactique* (2).

---

(1) Je dois avertir qu'à l'insu l'un de l'autre, M. Pieri et moi, nous avons eu en même temps la même idée. En effet, M. Pieri, dans son étude *Sur la Géométrie envisagée comme un système purement logique* (qui est un abrégé de l'autre déjà citée et qui fut communiquée au Congrès international de Philosophie, par M. Couturat, le 3 août 1900, lorsque ma communication actuelle était déjà préparée et annoncée), énonce la possibilité de définir tous les autres symboles géométriques au moyen des deux que j'ai choisis comme non définis, tout en ajoutant que la complication excessive à laquelle lui semble donner origine le développement de ce système lui donne le désir d'entreprendre de nouvelles études à ce sujet, avant d'en énoncer les premiers résultats.

(2) Il est presque inutile de remarquer que, si l'on énonçait tout de suite cette *définition : mouvement* signifie « la classe à laquelle appartient toute fonction m telle que 1° si x est un point, mx est aussi un point; 2° quels que soient les points x et y, le couple (mx, my) est superposable au couple (x, y) », on pourrait en

Digitized by Google

Comme aujourd'hui nous ne voulons pas nous occuper des *postulats*, nous supposons en avoir construit *un système* dans lequel soient énoncées *quelques propriétés* de nos *symboles non définis*, suffisantes pour en *déduire* toutes les *autres propriétés* de ces *symboles* et des *autres* qui, par leur moyen, seront définis (¹).

Pour abréger nous écrirons :

Def	au lieu de	*définition*,
figure	»	*ensemble de points*,
$\equiv$	»	*est superposable à*,
(a, b)	»	*couple* formé par les objets a et b.

4. Définition de « mouvement ».

Def I. — Si a et b sont des points distincts (²),

droite ab

---

déduire que « *la symétrie* par rapport à un plan arbitraire est *un mouvement* » ; et alors le mot *mouvement* n'aurait plus *sa signification ordinaire* [tandis qu'il l'a conservée dans l'ouvrage cité de M. Pieri, aussi bien que dans l'autre de M. Peano (n° 1)].

(¹) Il est donc bien entendu que, si aujourd'hui nous nous occupons seulement des *symboles non définis* et des *définitions*, ce n'est pas que nous croyons pouvoir nous passer de *postulats*.

Mais la désinvolture avec laquelle nous supposons avoir construit un système de postulats, sans nous donner la peine de le construire effectivement, peut sembler bien commode et peut-être excessive. Nous espérons qu'une remarque, bien simple d'ailleurs, sera suffisante pour nous justifier.

Si (après avoir choisi un système de symboles non définis et un système de postulats) *on veut changer le système de symboles non définis, il n'est pas nécessaire de changer le système de postulats* (tout au plus, on pourrait les *transcrire*, en remplaçant les *anciens symboles non définis* par leur *signification* exprimée au moyen des *nouveaux*; mais il paraît que cela même ne soit pas absolument nécessaire, car il n'y a peut-être pas un seul livre de Géométrie dont les postulats soient énoncés sans faire usage explicite de quelques *symboles définis*).

Donc, pourvu que quelqu'un ait construit un système acceptable de postulats pour la Géométrie euclidienne, on pourra se servir de ce système, sans se préoccuper de la diversité des systèmes de symboles non définis.

(²) « x et y sont des points *coïncidents* » signifie « x est un point et y est *le même* point » ; « x et y sont des points *distincts* » signifie : « x est un point et y est *un autre* point ». Par conséquent, quoique les mots *coïncidents* et *distincts* soient employés presque exclusivement en *Géométrie*, les *idées* qu'ils représentent appartiennent à la *Logique pure* aussi bien que celles représentées par les phrases *le même* et *un autre*.

Digitized by Google

signifie : « figure à laquelle appartient chaque point x, tel qu'il n'existe aucun point y, distinct de x, qui vérifie simultanément les conditions

$$(a, y) \equiv (a, x) \quad \text{et} \quad (b, y) \equiv (b, x). \text{ »}$$

Def II. — Quels que soient les points a et b,

centre de (a, b)

signifie : « point x tel que

$$(a, x) \equiv (x, b)$$

et qu'il n'existe aucun point y, distinct de x, qui vérifie simultanément les conditions

$$(a, y) \equiv (a, x) \quad \text{et} \quad (b, y) \equiv (b, x) \text{ »} \ (^1).$$

Def III. —

t est une **translation**

signifie : « quel que soit le point x, tx est aussi un point ; et quels que soient les points x et y, le centre de (x, ty) (*Def II*) est aussi le centre de (tx, y) ».

Def IV. — Si a et b sont des points distincts,

r est une **rotation autour de** (a, b)

signifie :

1° Quel que soit le point x, rx est aussi un point ;

2° Quels que soient les points x et y, $(rx, ry) \equiv (x, y)$;

3° ra et rb coïncident respectivement avec a et b ;

4° Si un point x, qui n'appartient pas à la droite ab (*Def I*) coïncide avec rx, tout point y coïncide avec ry » (²).

(¹) On pourrait remplacer la *Def II* par les suivantes :

Def II'. — Quel que soit le point a « centre de (a, a) » signifie a ;

Def II''. — Si a et b sont des points distincts « centre de (a, b) » signifie : « point x, de la droite ab (*Def I*), tel que $(a, x) \equiv (x, b)$ ».

Les *postulats* (n° 3) doivent *énoncer,* ou permettre de *déduire,* l'*existence* et l'*unicité* du point x considéré dans la *Def II''* et doivent permettre aussi de déduire la *Def II'* de la *Def II.*

(²) Voyons si un r qui satisfait aux conditions énoncées dans cette *Def* pourrait ne pas être une *rotation* autour de (a, b), selon *l'acception ordinaire* de cette phrase. Après les conditions 1°, 2°, 3°, on pourrait encore supposer que r soit une *symétrie* par rapport à un plan déterminé, par exemple σ, auquel appartiendraient les points a et b ; mais alors, si x était un point appartenant au plan σ et non à

Digitized by Google

Def V. — Si a est un point,

r est une **rotation autour de** a

signifie : « on peut déterminer des points b et c distincts de a, une rotation r' autour de (a, b) (*Def IV*) et une rotation r'' autour de (a, c), de manière que, si x est un point quelconque, rx coïncide avec $r''(r'x)$ » (¹).

Def VI. —

m est un **mouvement**

signifie : « on peut déterminer une translation t (*Def III*), un point a et une rotation r autour de a (*Def V*), de manière que, si x est un point quelconque, mx coïncide avec $r(tx)$ » (²).

---

la droite ab, et si y était un point n'appartenant pas au plan σ, x coïnciderait avec rx, tandis que y serait distinct de ry, ce qui serait en contradiction avec la condition 4°.

Par suite, moyennant la *Def IV*, la phrase définie « r est une rotation autour de (a, b) » acquiert exactement sa *signification ordinaire*.

(¹) Soit r une rotation autour de a, selon *l'acception ordinaire* de cette phrase; alors ra coïncide avec a.

S'il y a un point y distinct de a qui coïncide avec ry, on aura rempli les conditions énoncées dans la *Def V*, en identifiant b avec y, r' avec r, c avec un point quelconque et r'' avec une *transformation identique* (dans notre cas, *rotation nulle* ou, ce qui est la même chose à notre point de vue, *tour complet*).

Si aucun point y distinct de a ne coïncide avec ry, on pourra remplir aisément les conditions énoncées dans la *Def V*, en choisissant b et r' de manière que pour un certain point y, quelconque mais distinct de a, $r'y$ coïncide avec ry [par exemple, soit b le centre de (y, ry) et soit r' un demi tour], en identifiant c avec ry et en choisissant r'' de manière que pour un certain point z, quelconque mais n'appartenant pas à la droite ay, $r''(r'z)$ coïncide avec rz [ce qui est bien possible car puisque

$$(a, r'z) \equiv (a, z) \equiv (a, rz) \qquad \text{et} \qquad (r'y, r'z) \equiv (y, z) \equiv (ry, rz),$$

l'on a

$$(a, r'z) \equiv (a, rz) \qquad \text{et} \qquad (c, r'z) \equiv (c, rz)].$$

Après quoi, puisque a, y, z n'appartiennent pas à une même droite et puisque ra, ry, rz coïncident respectivement avec $r''(r'a)$, $r''(r'y)$, $r''(r'z)$, si x est un point quelconque, rx coïncide aussi avec $r''(r'x)$.

(²) Soit m un mouvement, selon l'*acception ordinaire* de ce mot.

S'il y a un point y, qui coïncide avec my, on aura rempli les conditions énoncées dans la *Def VI*, en identifiant t avec une *transformation identique* (translation nulle), a avec y, r avec m.

Si aucun point y ne coïncide avec my, on pourra remplir aisément les con-

Digitized by Google

5. Essai d'autres définitions.

Maintenant que nous avons *accompli* notre tâche (n° 4) en laissant de côté toute préoccupation *didactique* (n° 3), nous désirons faire remarquer la possibilité d'employer notre *système* de *symboles non définis* (n° 3), même dans l'*enseignement élémentaire*.

Naturellement il faudra modifier un peu la *définition* de *mouvement* (¹); d'abord, on pourra *définir* d'*autres symboles* et en *développer* la théorie au moyen de *postulats* (n° 3).

Nous donnerons ici un petit essai de ces *définitions*.

Def I. — (La *Def I* du n° 4.)

Def II. — (La *Def II''* énoncée dans la *note* à la *Def II* du n° 4.)

Dans toutes les *Def* suivantes, il est sous-entendu que a et b sont des points distincts.

Def III. —

surface sphérique qui a pour centre a et qui passe par b

signifie : « figure à laquelle appartient tout point x tel que

$$(a, x) \equiv (a, b) \text{ ».}$$

Def IV. —

surface sphérique qui a pour pôles a et b

signifie : « surface sphérique qui a pour centre le centre de (a, b) (*Def II*) et qui passe par b (*Def III*) ».

Def V. — Si c et d sont des points distincts de la droite ab (*Def IV*),

(c, d) **n'entrelace pas** (a, b) (²)

---

ditions énoncées dans la *Def VI*, en choisissant t de manière que, pour un certain point quelconque y, ty coïncide avec my, en identifiant a avec my et en choisissant r de manière que, si u est un certain point quelconque distinct de y et v est un certain point quelconque n'appartenant pas à la droite yu, $r(tu)$ et $r(tv)$ coïncident respectivement avec mu et mv.

(¹) Et l'on pourra même se passer complètement de ce symbole, en définissant la relation *est superposable à* entre des *figures quelconques*.

(²) Pour éviter toute ambiguïté, nous avons remplacé par *n'entrelace pas* la phrase, habituelle en Géométrie projective, *ne sépare pas;* car, si par exemple les points considérés se suivent dans l'ordre a, c, d, b, il nous semble que l'énoncé

Digitized by Google

signifie : « la surface sphérique qui a pour pôles a et b (*Def IV*) n'a aucun point commun avec la surface sphérique qui a pour pôles c et d ».

Def VI. —

c est un point placé entre a et b

signifie : « Si x est le centre de (a, b) (*Def II*), c coïncide avec x ou est un point de la droite ab (*Def I*) tel que (c, x) n'entrelace pas (a, b) (*Def V*) ».

Def VII. —

segment ab

signifie : « figure à laquelle appartiennent a, b et tout point placé entre a et b (*Def VI*) ».

Def VIII. —

prolongement de ab (1)

signifie : « figure à laquelle appartient tout point x tel que b soit placé entre a et x (*Def VI*) ».

Def IX. —

rayon ab (2)

signifie : « figure à laquelle appartient tout point du segment ab (*Def VII*) et du prolongement de ab (*Def VIII*) » (3).

Def X. — Si c et d sont des points distincts de la droite ab (*Def I*),

d suit c comme b suit a

signifie : « le prolongement de ab (*Def VIII*) contient le prolongement de cd, ou celui-ci contient celui-là ».

Def XI. —

symétrique de a par rapport à b

signifie : « point x tel que b est le centre de (a, x) (*Def II*) ».

« (c, d) n'entrelace pas (a, b) » soit plus proche du langage ordinaire que l'autre (c, d) ne sépare pas (a, b).

(1) Nous abrégeons ainsi la phrase trop longue « prolongement du segment ab du côté de b ».

(2) Nous abrégeons ainsi la phrase trop longue « rayon qui sort de a et qui passe par b ».

(3) Ou, en se rapportant directement à la *Def VI*, « figure à laquelle appartient chaque point x tel qu'il existe au moins un point y tel que b et x soient placés entre a et y (*Def VI*) ».

Digitized by Google

***

Dans toutes les *Def* suivantes, il est sous-entendu que c est un point n'appartenant pas à la droite ab (*Def I*).

Def XII. —

(a, b) **est perpendiculaire à** (b, c)

signifie : « b est un point de la surface sphérique qui a pour pôles a et c (*Def IV*) ».

Def XIII. — Si d est un point distinct de c,

(c, d) **est parallèle à** (a, b)

signifie : « le symétrique de a par rapport au centre de (b, c) (*Def II, XI*) est un point de la droite cd (*Def I*) ».

Def XIV. —

x est un point **intérieur au triangle** abc

signifie : « x est un point distinct de a et il y a un point du prolongement de ax (*Def VIII*) qui est placé entre b et c (*Def VI*) ».

Def XV. —

x est un point **intérieur à l'angle** $\widehat{abc}$ (1)

signifie : « x est un point distinct de b et il y a un point du rayon bx (*Def IX*) qui est placé entre a et c (*Def VI*) ».

Def XVI. —

plan abc

signifie : « figure à laquelle appartient tout point x tel qu'il n'existe aucun point y, distinct de x, qui vérifie simultanément les conditions

$$(a, y) \equiv (a, x), \qquad (b, y) \equiv (b, x), \qquad (c, y) \equiv (c, x) \text{ ».}$$

***

L'essai de *Def* que nous venons de donner nous semble suffisant à prouver la possibilité d'adopter notre méthode, même dans l'enseignement élémentaire.

---

(1) Nous considérons ici les *angles convexes* seulement.

Digitized by Google

On remarquera l'analogie parfaite qui existe entre les *Def I* et *XVI* des deux figures fondamentales *droite* et *plan*, et la possibilité de définir le *plan* immédiatement après la *droite* (¹) ou de différer la *Def* du *plan*, ainsi que nous avons fait, pour définir auparavant les relations de *perpendicularité* et de *parallélisme* entre *couples de points* (ou *droites*), qui n'en dépendent pas nécessairement.

(¹) La *Def XVI* ne présuppose, en effet, aucune des *Def* qui suivent la *Def I*.

Digitized by Google

Digitized by Google

SECTION IV. — MÉCANIQUE.

REMARQUES SUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS SPÉCIALES DES PETITES PLANÈTES,

PAR JEAN BOCCARDI, A CATANIA.

Je n'ai pas l'intention de proposer quelque modification à la théorie des perturbations spéciales qu'éprouvent les petites planètes, mais seulement de donner aux calculateurs d'orbites quelques conseils, dont l'expérience m'a montré l'utilité pratique (1). Je n'attirerai votre bienveillante attention que pendant quelques minutes.

Tout le monde connaît les trois méthodes pour le calcul des perturbations spéciales par quadratures mécaniques, c'est-à-dire : la méthode d'Encke, celle de Hansen-Tietjen et celle de la variation des constantes. Évidemment chacune de ces méthodes présente des avantages, mais comme je me suis placé sur le terrain de la pratique, pour ce qui concerne les petites planètes, je crois pouvoir affirmer que la véritable méthode à suivre est celle de la variation des éléments.

La méthode d'Encke est très utile lorsqu'il s'agit de calculer les perturbations pour un court laps de temps, ce qui fait qu'elle est tout indiquée pour les comètes; mais pour suivre une planète pendant plusieurs oppositions, elle n'est plus suffisamment exacte, et d'ailleurs, il est difficile de reconnaître les fautes de calcul qui s'y seraient glissées, et qu'il n'est pas facile d'éviter.

La méthode de Hansen-Tietjen dans laquelle on emploie les coordonnées polaires, élégante pour l'enseignement et commode pour les calculs, présente aussi des inconvénients dès qu'il s'agit d'étendre le calcul à un long

(1) Dans quelques mois, cent ans se seront écoulés depuis l'époque où Piazzi découvrait Cérès, la première des petites planètes; puisse cette Communication être un faible hommage à la mémoire de mon illustre compatriote!

Digitized by Google

laps de temps. La méthode de Lagrange, très simple dans son exposition, facile pour les calculs, se prête très bien aux vérifications, ce qui fait que, tout en exigeant des calculs un peu plus longs que les deux autres méthodes, en définitive elle nous conduit plus rapidement au but proposé. Dès qu'on a déterminé une première orbite d'une petite planète au moyen des observations d'une opposition, on a besoin de calculer les perturbations jusqu'à l'opposition suivante, afin de pouvoir dégager les observations, et ainsi corriger les éléments primitifs (¹). On voit qu'il n'est aucunement nécessaire d'osculer à une date intermédiaire entre la première et la seconde opposition, ces planètes n'étant observées qu'aux environs des oppositions, c'est-à-dire pendant un mois, et dans ce court intervalle l'effet des perturbations étant presque nul. Par conséquent, on peut s'épargner d'additionner les différentielles de proche en proche, comme si on voulait osculer pour chacune des dates intermédiaires. Il est peut-être utile d'avoir égard à la présence de la Lune sur l'horizon, afin que l'osculation ait lieu à une époque à laquelle les observations pourront se faire plus facilement.

Pour ce qui concerne la mise en train des calculs, on recommande généralement de se servir des Tables publiées par Tietjen (*Veröffentlichungen des Rechen-Instituts zu Berlin,* n° 1) qui permettent de déduire de l'anomalie moyenne M l'anomalie v, sans passer par l'anomalie excentrique E. Ces tables, assez compliquées, d'ailleurs, donnent les anomalies vraies à 2″ ou 3″ près, ce qui est plus que suffisant pour le calcul des perturbations, qui se fait à 5, ou même parfois à 4 décimales. Cependant, si j'osais exprimer mon opinion, je dirais que les Tables de Tietjen sont très avantageuses lorsqu'il s'agit de trouver l'anomalie vraie pour quelque lieu isolé; mais dès qu'il s'agit d'une série de lieux, comme il arrive dans le calcul des perturbations spéciales, il est plus pratique de calculer toutes les E et de passer tout de suite aux v par les formules connues

$$M = E - \varepsilon'' \sin E, \qquad r \sin v = a \cos\varphi \sin E, \qquad r \cos v = a(\cos E - \sin\varphi).$$

(¹) Certains astronomes, je le sais, se contentent d'une orbite approchée, qui, loin de coïncider avec tous les lieux observés durant une révolution entière de l'astre, ne fait que les toucher à peu près. Ils négligent totalement les perturbations, parce qu'ils comptent sur une compensation sérieuse. A mon avis, ce n'est là qu'un palliatif; on veut éviter de longs calculs; mais ce procédé ne pourrait pas suffire pour un long laps de temps. Pour que les planètes ne nous échappent pas, il faut enfin calculer, au moins, les perturbations générales, avec les méthodes de Gyldén, qui exigent une orbite exacte. Donc, il vaut mieux, je pense, calculer les perturbations et représenter exactement les lieux dès les premières oppositions.

Digitized by Google

en employant les logarithmes d'addition là où il y a lieu. Il n'y a que les deux premières valeurs de E répondant aux deux premieux lieux de la série, qui exigent quelque tâtonnement, mais ensuite, en formant les différences des différents ordres, on obtient immédiatement des valeurs très approchées de E. On peut faire ce calcul avec 6 décimales en s'arrêtant cependant à la seconde ronde ou bien à 5 décimales en allant jusqu'aux centièmes de minute. Il est vrai que quelquefois on calcule les perturbations de 80 en 80 jours pour Saturne, et alors les différences première, seconde, troisième des E ne suffisent pas pour obtenir une valeur approchée des E suivantes; mais comme on doit calculer aussi les perturbations par l'action de Jupiter, où le calcul se fait tout au plus de 40 en 40 jours, on voit qu'alors la marche des différences est très régulière. L'avantage principal de ce calcul des v, en passant par les E, est qu'alors on possède toutes les quantités dépendant des éléments de la planète perturbée, dont on a besoin dans le calcul des dérivées des éléments, c'est-à-dire : $u = v + w$, r, $\sin v$, $\cos v$, $\cos E$. Tandis qu'en se servant des *Tables de Tietjen,* après avoir obtenu v, il faut calculer r par la formule

$$r = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 + \sin \varphi \cos v}.$$

Ensuite, comme pour obtenir la dérivée de l'excentricité par rapport à la composante tangentielle S, on a besoin de $\cos E$, puisque

$$(\varphi : S) = a \cos \varphi (\cos v + \cos E),$$

on est obligé de le calculer par

$$\cos e = \frac{\cos v + \sin \varphi}{1 + \sin \varphi \cos v}.$$

On pourrait plus simplement déterminer $\cos E$ par la formule

$$\sin E = \frac{r \sin v}{a \cos \varphi},$$

en calculant $\cos E$ à vue, après avoir trouvé $\sin E$. Or, si l'on a égard à tous ces calculs supplémentaires, on doit convenir qu'il est plus simple de calculer les v en passant par les E.

Pour la même raison je ne conseille pas de calculer les v en les développant en série :

$$v = M + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin M + \left(\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4\right) \sin 2M + \ldots;$$

quoique pour les planètes à faible excentricité, cette méthode soit assez

Digitized by Google

rapide et suffisamment commode, parce qu'on peut, dans toutes les années, se servir des mêmes valeurs des coefficients entre parenthèses, attendu que les perturbations n'altèrent pas beaucoup l'excentricité. Il reste toujours à calculer les autres quantités auxiliaires. Afin d'éviter les tâtonnements dans le calcul des anomalies excentriques, on peut avoir recours aux Tables données par M. Callandreau (*Bulletin astr.*, octobre 1885) ou bien à celles plus étendues publiées par J.-J. Astrand (*Hülfstafeln zur leichten und genauen Auflösungs des Kepler'schen Problems;* Leipzig, 1890). Du reste, lorsqu'on a calculé les perturbations pour une révolution entière de la planète, on a déjà des valeurs approchées des E pour tous les points de l'orbite, l'effet des perturbations n'étant pas bien sensible sur l'excentricité.

Pour ce qui est des intervalles dans lesquels on partage le temps d'une osculation à l'autre, on adopte ordinairement 40 jours pour Jupiter. Cependant je pense qu'avant d'adopter ces intervalles il convient de s'assurer que les valeurs différentielles soient assez petites, autrement on s'expose à des erreurs de plusieurs secondes sur les intégrales. Pour reconnaître à l'avance si les perturbations seront considérables, on doit avoir égard à la position relative de la petite planète et de Jupiter. Lorsque ces deux planètes sont en conjonction, les différentielles relatives au périhélie pour des périodes de 40 jours atteignent quelquefois 120″. Dans ces conditions, il est presque indispensable d'adopter des périodes de 20 jours. Voici un exemple. Ayant calculé les perturbations par l'action de Jupiter sur la planète (347) *Pariana*, avec des périodes de 40 jours, du 15 mars 1898 au 8 juillet 1899, j'avais obtenu les valeurs suivantes :

$$\int \Delta L = +1'21'',87, \qquad \int \Delta\pi = -12'14'',70, \qquad \int \Delta\mu = +0'',57284.$$

La distance de Jupiter à *Pariana* varie entre 7,80 et 2,59 et la distance ♁ — ☉ étant = 1.

Or, en avril 1898, Jupiter et *Pariana* avaient été en conjonction avec une distance minimum de 3,26.

Ceci m'amena à recalculer les perturbations avec des intervalles de 20 jours. J'obtins alors :

$$\int \Delta L = +1'18'',118, \qquad \int \Delta\pi = -12'22'',444, \qquad \int \Delta\mu = +0'',56640.$$

Donc le premier calcul, en prenant des périodes de 40 jours, me

Digitized by Google

donnait une erreur de — 3″,985 sur l'anomalie moyenne du 8 juillet. Cette erreur se reportait entièrement sur le lieu géocentrique.

On se convaincra facilement que dans bien des cas, surtout pour des planètes plus rapprochées de Jupiter — car Pariana a un mouvement moyen assez fort, — on se convaincra, dis-je, que l'erreur pourra atteindre 10″ sur l'anomalie moyenne, et croître encore lorsqu'on passe aux positions géocentriques. Et alors, le moyen de bien représenter un lieu avec des erreurs pareilles sur les perturbations?

Je passe à une autre remarque de quelque importance, c'est-à-dire qu'il n'est pas toujours exact de négliger les perturbations de la part de Mars, comme tout à fait insignifiantes. Ceci peut être légitime pour les planètes ayant un faible mouvement moyen; mais, dès que celui-ci a dépassé 900″, on ne peut plus dire *a priori* que l'action de Mars soit négligeable. Je prends comme exemple la planète *Monachia* (428), dont le mouvement moyen est de 1009″. Pour me former une idée exacte de ce que pouvaient donner les perturbations de la part de Mars sur cette planète, j'ai eu la patience d'en faire le calcul avec des périodes de 10 jours, du 19 avril 1899 au 7 janvier 1901. On comprend que, attendu la petitesse des perturbations, j'aie pu garder toujours les mêmes éléments dans tout ce calcul. Voici la disposition que j'ai adoptée pour le calcul des composantes de la force perturbatrice. A première vue, elle paraît un peu plus longue que celle donnée par M. Buchholz dans *Theoretische Astronomie* de Klinkerfues; mais c'est qu'il supprime des calculs, en supposant qu'on les fasse mentalement. Cela n'est pas trop difficile en calculant à 4 décimales, comme il le fait; mais tout le monde ne réussit pas à le faire en calculant avec 5 figures.

A la vérité, les différentielles relativement à Mars étaient minimes, on les dirait des infiniment petits; et cependant, lorsqu'on intègre du 19 avril 1899 au 13 juin 1900, on obtient :

$$\int \Delta L = +1'',185, \qquad \int \Delta \pi = -1'',499,$$

ce qui fait + 2″,684 sur l'anomalie moyenne. Et dire que j'ai adopté pour Mars $\frac{1}{3093500}$, la plus petite qui ait été proposée! Au fond, 2″,684 ne sont pas grand'chose; mais nous, qui tenons compte des millièmes de seconde dans les termes élevés des formules de quadratures, nous ne devrions pas les négliger.

Je termine en exprimant quelques *desiderata* relativement aux calculs et aux observations des petites planètes. Mon premier vœu serait qu'on nous donnât des Tables de logarithmes ne laissant rien à désirer pour les

Digitized by Google

calculs d'orbites. Certainement, on compte par centaines les Tables de logarithmes, et il y en a qui, sous certains rapports, sont excellentes, et cependant je pense qu'il n'y en a pas qui répondent à tous les *desiderata* des calculateurs. Pour les calculs d'orbites, évidemment, les meilleures Tables sont celles à 6 décimales de Bremiker, revues par Albrecht. Leur disposition est très heureuse; le calcul des parties proportionnelles se fait à vue très facilement. Cependant ces Tables ne me paraissent pas excellentes sous tous les rapports. Et d'abord, les Tables des logarithmes d'addition et de soustraction, placées à la fin du volume, ne sont pas aussi bien disposées que celles de Zech à 7 décimales. Dans celles-ci, on retranche toujours le logarithme du nombre plus faible de celui du nombre plus fort, et l'on fait ensuite l'addition ou la soustraction du nombre donné par les Tables, avec le nombre plus fort. L'addition se fait pour avoir le logarithme de la somme, la soustraction pour celui de la différence. On voit que ce procédé est très régulier. Cette manière de calculer est très commode et il est presque impossible de se tromper, surtout si l'on a soin de marquer au crayon bleu, dans la série des dates, les endroits où il y a un changement d'opération. Au contraire, avec les Tables de Bremiker, tantôt on doit retrancher le logarithme plus faible du plus fort, tantôt on doit faire le contraire.

Je pense aussi qu'on ferait bien de donner une disposition plus commode à la Table de Bremiker, pour la conversion des parties de l'équateur en heures, minutes et secondes, et *réciproquement*. La disposition des Tables correspondantes de la *Connaissance des Temps* est très commode. Il manque aussi au Recueil de Bremiker une Table donnant la valeur, en secondes d'arc, des minutes de 1 à 60 et des degrés de 1° à 360°. Cette Table serait très utile pour le calcul de l'anomalie moyenne des planètes d'une opposition aux suivantes; on la trouve dans les Tables à 5 décimales de Becker. Enfin, pour que le Recueil de Bremiker devienne le manuel du calculateur d'orbites, le dispensant de tenir trois ou quatre volumes différents sur son bureau, je pense qu'on ferait bien d'y ajouter un recueil des principales formules relativement aux calculs d'orbites, et une Table, pas très étendue cependant, permettant d'obtenir, pour des excentricités différentes, une valeur approchée de l'anomalie excentrique répondant à une anomalie moyenne donnée. Le volume ne deviendrait pas beaucoup plus gros, mais il serait en revanche le *vade-mecum* du calculateur d'orbites.

Les Tables de Becker à 5 décimales sont excellentes par leur disposition et par les Tables de logarithmes d'addition ou de soustraction.

Digitized by Google

semblables à celles de Zech. Elles ne laissent rien à désirer pour les calculs à cinq figures. Je remarque seulement qu'il y manque, au bas des Tables des logarithmes des nombres, les expressions en degrés et minutes des nombres correspondant aux logarithmes. Ces Tables seraient utiles lorsqu'on résout, par tâtonnements, l'équation de Képler, quand on calcule à 5 décimales des éphémérides des planètes, ce qui se fait assez souvent, par exemple pour les *Genäherte Oppositions-Ephemeriden* du Rechen-Institut.

Enfin les Tables de Schrön sont excellentes ; cependant le calcul des sinus et des tangentes pour les arcs de 0° à 6° ne s'y fait pas commodément. Sous ce rapport, les Tables de Bruhns sont préférables.

Un autre *desideratum* serait que dans le Tableau abrégé des coordonnées héliocentriques des grosses planètes, destiné au calcul des perturbations et donné par la *Connaissance des Temps* et par le *Berliner Jahrbuch*, au lieu de donner les coordonnées susdites pour 0 heure, on les donnât pour 12 heures. On sait en effet que les éphémérides des planètes se calculent pour minuit moyen et que, ordinairement, l'anomalie moyenne pour la date de l'osculation est donnée aussi pour minuit ; tandis que, dans le calcul des perturbations, on doit prendre les anomalies à 0 heure, afin qu'elles correspondent aux dates des coordonnées héliocentriques. Cela est assez souvent une cause d'erreur.

Enfin, mon dernier vœu serait que les astronomes observateurs donnassent un peu plus de place aux observations des petites planètes. Souvent, après avoir travaillé beaucoup à corriger une orbite et à donner une éphéméride pour l'opposition, on a la douleur d'apprendre que la planète n'a pas été observée, parce qu'elle n'a pas été cherchée. Et cependant il y a deux cents équatoriaux qui sont dirigés vers le ciel toutes les fois que l'état de l'atmosphère le permet! Peut-être ferait-on mieux d'observer moins souvent les anciennes petites planètes, *Cérès, Pallas, Vesta,* dont la théorie est faite depuis trente ou quarante ans; il resterait alors du temps pour l'observation des planètes récentes.

Voilà, Messieurs, les vœux que j'ose exprimer devant les Maîtres de la Science, afin qu'on vienne en aide aux esprits dont on peut dire que *leur verre n'est pas grand.*

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR LES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A CARACTÉRISTIQUES RÉELLES,

PAR M. J. HADAMARD (PARIS).

Dans l'étude des équations aux dérivées partielles du second ordre, le cas des équations à caractéristiques réelles se présente au premier abord comme entièrement différent de celui des caractéristiques imaginaires. Les conditions aux limites par lesquelles se détermine une solution manifestent une opposition parfaitement tranchée, les solutions des équations à caractéristiques réelles se déterminant par le problème de Cauchy, tandis que ce dernier est, en général, impossible pour les équations à caractéristiques imaginaires (1).

J'ai été conduit, non pas à nier cette opposition, mais à la considérer comme beaucoup moins absolue que je viens de le dire. A beaucoup de points de vue, les problèmes relatifs aux équations à caractéristiques réelles doivent être envisagés comme des problèmes mixtes, offrant des caractères intermédiaires entre ceux qu'on leur reconnaît habituellement et ceux des équations à caractéristiques imaginaires.

Prenons pour exemple l'équation $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \Delta V$. Il est classique que,

(1) Dans le cas particulier de l'équation de Laplace, ce problème conduirait à se donner, pour $x = 0$, les valeurs de V et de $\frac{\partial V}{\partial x}$. On peut se demander, V étant tout d'abord donné (pour $x = 0$), comment il faut choisir les valeurs de $\frac{\partial V}{\partial x}$ pour que le problème soit possible. Cette question n'offre aucune difficulté : on trouve que $\frac{\partial V}{\partial x}$ doit être égal à la dérivée normale du potentiel d'une double couche d'épaisseur $\frac{V}{2\pi}$, augmenté d'une fonction analytique quelconque.

Digitized by Google

pour cette équation, le problème de Cauchy est possible et déterminé lorsque la multiplicité initiale est $t = 0$. Mais *il n'en est pas de même si l'on prend, pour multiplicité initiale, la multiplicité* $x = 0$, si l'on se donne, par conséquent, pour $x = 0$, les valeurs de V et de $\frac{\partial V}{\partial x}$. En effet, supposons, en particulier, que ces valeurs soient indépendantes de t; alors, ou bien la solution sera indéterminée (ce qui est peu probable, bien que je n'aie pu le démontrer rigoureusement jusqu'ici) (¹), ou bien elle sera unique et alors indépendante de t. Mais, dans ces conditions, l'équation donnée se réduit à $\Delta V = 0$ et nous savons qu'alors le problème de Cauchy *n'est pas possible en général.*

L'équation précédente est celle du son. Lorsqu'il s'agit d'une atmosphère entièrement illimitée, sans la présence d'aucun solide, et qu'on donne la position et les vitesses initiales des différents points, le problème qui est ainsi posé est celui de Cauchy. Mais (et ceci est d'accord avec ce qui précède) la question est tout autre lorsqu'il s'agit du mouvement d'un milieu limité, remplissant, par exemple, dans sa position d'équilibre, la région $f(x, y, z) \geqq 0$. Dans ces conditions, les données initiales font connaître :

1° Sur la variété M_1 définie par $t = 0$, $f(x, y, z) \geqq 0$; la fonction cherchée et sa dérivée normale;

2° Sur la variété M_2 définie par $f(x, y, z) = 0$, $t \geqq 0$: la dérivée normale *seule.*

En fait, on reconnaît aisément que le problème qui consiste à se donner, en même temps que la donnée ordinaire sur M_1, la fonction *seule* ou sa dérivée normale *seule* sur M_2, ne peut admettre plus d'une solution. Un fait tout semblable se produit pour l'équation à deux variables indépendantes, lorsque les données aux limites se rapportent à une courbe coupée par une caractéristique en plus d'un point.

L'analogie partielle avec le cas des caractéristiques imaginaires est ici bien manifeste : elle en entraîne une autre relative aux solutions qui peuvent être données de ces différentes questions. Les méthodes par lesquelles on a pu résoudre le problème de Cauchy (telles que celle de Riemann pour l'équation à deux variables, celle de Kirchhoff pour l'équation du son) sont entièrement indépendantes de la forme de la multiplicité sur laquelle sont données les conditions aux limites. Au contraire, les solutions du problème de Dirichlet (ou des problèmes analogues) sont

(¹) J'ai obtenu cette démonstration ultérieurement (février 1901). Voir *Notice sur les Travaux scientifiques de* M. J. HADAMARD. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Digitized by Google

toutes liées de la manière la plus étroite à la forme de cette multiplicité. *Notre problème mixte possède également ce dernier caractère* (ainsi qu'il est aisé de le reconnaître pour l'équation à deux variables), *non pas relativement à la multiplicité* M_1 *sur laquelle les données sont celles de Cauchy, mais relativement à la multiplicité* M_2 *sur laquelle les données sont celles de Dirichlet* (¹).

Signalons encore une dernière analogie. La fonction fondamentale qui sert à la résolution du problème de Dirichlet est la fonction de Green $g(x, y; x_0, y_0)$, laquelle est infinie pour $x = x_0$, $y = y_0$. Dans le cas des caractéristiques réelles et du problème de Cauchy, un rôle analogue est rempli par la fonction de Riemann, laquelle reste finie dans les mêmes conditions. Cependant cette fonction de Riemann est liée aux intégrales à singularités qui s'introduisent dans les théories relatives aux équations à caractéristiques imaginaires, et cela de la manière suivante. M. Picard a remarqué que les intégrales analogues à $\log r$, qu'il convient d'introduire pour l'étude des équations telles que $\Delta u - cu = 0$, sont de la forme $A \log r + B$, A et B étant des fonctions régulières. Dans le cas de l'équation $a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$, l'intégrale analogue devra avoir la forme $A \log [(x - x_0)(y - y_0)] + B$. On trouve aisément les conditions auxquelles doit satisfaire A et le résultat obtenu est le suivant : *La fonction* A *n'est autre que la fonction de Riemann.*

(¹) *Voir* mon Mémoire *Sur l'intégrale résiduelle* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, p. 79 et suiv.; 1900).

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR LES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR M. V. VOLTERRA (ROME).

Tout le monde connaît le théorème de Poisson sur la fonction potentielle. Si ρ désigne la densité d'un corps fini S, et r la distance d'un point a, b, c de S au point x, y, z, et si l'on pose

$$V = \int_{\rho} \frac{\rho\, dS}{r},$$

on a

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho,$$

si le point x, y, z fait partie de l'espace S.

(La densité ρ doit satisfaire à certaines conditions peu restrictives et très connues.)

Ce théorème a été étendu sans difficultés à d'autres équations et à des systèmes d'équations différentielles du type elliptique.

Mais comment peut s'étendre ce théorème aux équations différentielles du type hyperbolique?

Soit x, y, z un point intérieur à l'espace S. Conduisons, en prenant le point x, y, z pour sommet, un cône de révolution ayant l'axe parallèle à x et dont l'ouverture soit de 45°. Soit S' la partie de S comprise à l'intérieur de l'une des nappes du cône. Si nous remplaçons V par

$$V' = \int_{\rho'} \frac{\rho\, dS'}{r'},$$

où

$$r' = \sqrt{(x-a)^2 - (y-b)^2 - (z-c)^2},$$

on aura

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2} = 2\pi\rho.$$

Digitized by Google

De même, si nous appelons S″ la partie de l'espace S extérieure aux deux nappes du cône, et si nous posons

$$V'' = \int_{\rho''} \frac{\rho\, dS''}{r''} \log \frac{r''^2}{\sqrt{(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

où

$$r'' = \sqrt{(y-b)^2+(z-c)^2-(x-a)^2},$$

on aura

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial^2 V''}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V''}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V''}{\partial z^2} = -2\pi^2\rho.$$

Les théorèmes renfermés dans les formules (B) et (C) se déduisent aisément des formules (E) et (F′) que j'ai données dans mon Mémoire *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* (*Acta math.*, t. XVIII). Elles peuvent aussi s'obtenir directement et elles peuvent s'étendre à d'autres équations et à des systèmes du même type.

Les formules (E) et (F′) conduisent aussi à des résultats qui généralisent les théorèmes bien connus sur les discontinuités des dérivées des fonctions potentielles des surfaces et sur les discontinuités des fonctions potentielles des doubles couches.

Ces résultats comprennent des propriétés intéressantes que M. Levi-Civita a obtenues directement par une voie différente [*Sopra una clase d'integrali dell'equazione* $A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ (*Nuovo Cimento*, 4e série, t. IV; 1897)].

Digitized by Google

SECTION V. — BIBLIOGRAPHIE ET HISTOIRE.

NOTE ON THE MATHEMATICS OF THE OLD JAPANESE SCHOOL,

By R. FUJISAWA (Tokio).

The present short note is devoted to a subject which is entirely obsolete nowadays, and which appears to have only historical interest. It has been hastily written during my voyage, my coming to Paris to join this congress having been only settled definitively about a week before I left Tokio. Some of the works which I might have consulted were not accessible to me, and I had often to appeal to my memory alone. Owing to this circumstance and no less to the nature of the subject with which it deals, the present communication is vague in many respects. I crave your indulgence for this and many other shortcomings, which it may not be necessary to enumerate in this place.

There are circumstances which seem to suggest that, the bare fact that there is such a thing as the mathematics of the old Japanese school may not be altogether unknown to at least a few of the western mathematicians. To avoid misunderstanding, may I be allowed to say that I myself do not belong to this school. It might appear to be rather curious tat I schould speak upon a subject with which I am not familiar. To justify myself in this respect, may I be permitted to make a few remarks on the almost insurmountable difficulties which seem to accompany the study of this subject in the light of modern mathematics.

The nomenclature and the notations are as clumsy as they are awkward, and are likely to be repulsive to any one who is accustomed to those of the modern mathematics. Add to this, that there is a considerable number

Digitized by Google

of minor or branch schools, into which this old school has been subdivided in the course of time, each of them following notations which differ to a certain extent from one another. In this connection, it may be observed that many of the difficulties which one has to encounter in trying to make himself familiar with the present subject, may be traced to the various controversies and even jealousies which appear to have existed among these minor schools.

There is an innumerable number of books relating to the subject, of which a large number is not printed but preserved by transcription. Since some time, the imperial university of Tokio has been collecting books, manuscripts, etc., relating to the mathematics of the old Japanese school. The collection now amounts to more than two thousand volumes, but it seems to be only a small fraction of what must be collected to have any claim to completeness. No doubt a large number of these are devoted to subjects which are entirely elementary; but it so happens that things which seem to be original and valuable are mixed up with the calculations belonging to elementary arithmetic. On this account, one who would like to make himself master of the subject must go, with all the disadvantages of varied notations, lack of systematisation and classification, etc., through almost all the innumerable books, in order not to miss things which are really important. To start with, he knows that the complete study of the subject is a life-work, or even more, for him, with the prospect that a large part of his work will prove to be a waste labour. It is needless to say that this is by no means a fascinating work; at the same time the difficulties which I have been mentioning, and which may fairly be compared with those attending the study of Egyptian hieroglyphs, are the difficulties which a historian must be prepared to meet with. I hope to be able to find some among the young men who are studying mathematics under my direction, whom I could persuade to devote their lives to the profound study of the subject of which the present note gives only a superficial account. It is in view of having such men that the imperial university of Tokio has been collecting the literature relating to this subject, as before said.

In this connection, a new impetus was given by my friend and former colleague Dr. Kikuchi. He has translated some of the methods of finding the value of π, discovered by men of the old school, from the obsolete language of the original into the intelligible language of modern mathematics. His papers are coutained in the recent volumes and, I beleive, also in the forthcoming volume of the proceedings of the Tokio mathematical

Digitized by Google

and physical society, to which I have to refer for further particulars.

Relating more especially to those parts of the mathematics of the old Japanese school which promise to have the chance of having permanent value and interest, the following difficulties are to be met with. Very often results only are given, and not seldom it is difficult to trace the steps by which they might have been obtained. I can not express myself better than by recalling the well known incident connected with the publication of Fermat's theorems. Again it was not customary with a mathematician of this school to publish what he had discovered. He would keep it to himself and only transmit it to posterity by telling it to a select few of his disciples under oath that they in their turn shall follow the example set by their master. Again what may be called problem-challenge or perhaps mathematical tournament — I mean something like the challenge of the problem of the brachistochrone by a Bernoulli addressed to Newton, Leibniz and Marquis de l'Hospital — has been constantly going on among the various minor schools mentioned above. All these circumstances, to which I could add some more of analogous nature, had the aggregate effect of making the mathematics of this school extremely unintelligible and the course of its development difficult to follow. That there is a peculiar kind of mathematics which had its origin in Japan and its secluded development free from external influences, is a fact; but how for this mathematics has developed itself on the scale of the progress of modern mathematics, is a problem which, so far as I am aware of, has not hitherto been solved.

Before concluding these preliminary remarks, it is only just that I should mention that a few years ago a book entilled *the history of the old Japanese school* was published by my friend Mr. T. Ends. The compilation of this work cost its author some sixteen years of arduous labour and undaunted diligence. He seems to have spared neither time nor pain in order to make the history as complete as possible, and I have no doubt that it will serve as a useful guide to all the future students of this peculiar mathematics. I myself owe a great deal to this work for the little I know of this mathematics, and I take this opportunity to tender my most cordial thanks to its author. Only the fear that I might be misunderstood as agreeing with the author in those parts of his work which stand outside of the sphere of facts, emboldens me to say that the author is himself one of the few men belonging to the old school to be found now-a-days, that his book is written in a language not entirely intelligible and sometimes even repulsive to a student of modern mathe-

Digitized by Google

matics, and in the characteristic tone peculiar to the men of the old school and altogether at variance with the spirit of modern mathematics. May I hope that the remarks just made shall not have any effect on the great credit to which the work is surely entitled in view of the immense difficulties connected with its compilation.

Mathematics in the old days prior to the middle of the seventeenth century.

I might just as well skip over a period covering more than two thousand years prior to the middle of the seventeenth century, during which time no progress seems to have been made beyond the limit of arithmetic and the rudiments of elementary algebra and geometry. I shall only notice a few things which seem to have had their origin in those ancient days, and survived to this day in some form or other.

The system of numeration seems to have been from the beginning the decimal system with the circulating periods consisting of four digits instead of three. The most of the methods of calculation which are now-a-days included under the general name of elementary arithmetic, seem to have been known from the very early days. No doubt some of these methods had their origin in Japan; at the same time a large number of them seem to have been derived from Chinese sources. For some account of the Chinese arithmetic, with which I shall not have much to do in the sequel, I may refer to an article in one of the early volumes of *Crelle's Journal*, the article *Arithmetic* in the *Encyclopedia Metropolitana* written by Peacock, and some of the histories of mathematics, such as the well known treatise of the president of this section,

Beyond the limits of elementary arithmetic, no essential advance seems to have been made except perhaps the solutions of simple equations and some rough methods of calculating lengths and areas. That the hypothenuse of a right-angled triangle whose sides may be represented by 3 and 4 respectively, will be represented by 5, seems to have been known from very remote days. No doubt this was found by experience or by some tentative process. This so-called method of three-four-five is up to this day still used by artisans in testing perpendicularity, in some kinds of rough carpentry work.

Some of the names given to the various methods of calculation are as amusing as they are suggestive of their primitive nature. The summation of an arithmetical progression whose common difference is unity is

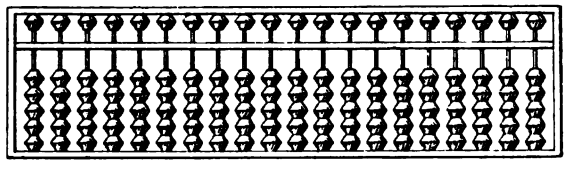
Digitized by Google

called the *timber-piling-calculation*, for which piles of shots may just as well be substitued; again the summation of a geometrical progression whose common ratio is 2, is called the *rats-calculation*, by which no doubt it is meant to signify that the sum increases with the number of terms at an enormous rate, as rats are proverbially said to increase in the course of time.

In the early days, the actual calculation was done by means of rods, at first made of bamboo and afterwards of wood, but always known by the technical name of *bamboo-rods*. The numbers from 1 to 9 are designated by means of rods as follows :

With these togeter with a symbol which stood for zero and which was sometimes replaced by a vacant space, they were able to write down any number, and calculate in exactly the same manner as we now-a-days do with Arabic numerals. It may only be necessary to remark that a rod put diagonally across a number shows that the number is to be substracted, that two numbers put down one above the other are to be added, that two numbers put down side by side are to be multiplied together, and that two numbers put down on the opposite sides of a certain vertical line are to be divided one by the other.

The use of the *bamboo-rods* in numerical calculations has since been entirely superceded by the introduction of a kind of abacus called *soroban*, which took place towards the end of the sixteenth century. The appearance of the soroban is depicted below :



It will not be necessary to describe the soroban, and how calculations are made with it, as no doubt this simple yet handy calculating machine is already well known, and even if this be not the case, how to use this instrument is likely to be at once apparent, it being not much different from other forms of abacus. It is very convenient and indeed, I may say, almost indispensable to those who are accustomed

Digitized by Google

to its use in adding numbers, especially when the numbers to be added are, instead of being written down beforehand, read off in rapid succession. Addition, subtraction and multiplication are done with soroban much in the same way as they are done in the ordinary written arithmetic. Division can also be performed on soroban in the same way as it is done in the ordinary written arithmetic, and indeed it is often done in that way; but here it is customary to make use of a peculiar nemonic which may be called a division-table versus multiplication-table. For the account of this nemonic as well as for a lucid explanation of the performance of calculation on soroban, I can not do better than refer to a paper written by prof. C.-G. Knott, formerly of the imperial university of Tokio, but now of the university of Edinburgh, which is to be found in the transactions of the Asiatic society of Japan published about twelve years ago.

The introduction of soroban was followed by progress, a little beyond the domain of elementary arithmetic. Something of algebra which seems to have gone so far as the rational treatment of negative numbers but could not possibly develop itself to any higher stage on account of its altogether cumbrous notation, something of geometry chiefly concerned with the study of regular polygons, magic square, etc., seem to have been the subject of favourite study of the mathematicians of this time. How much they really achieved, seems to be a question difficult to answer. It appears, however, highly probable that the rigour of methods and proofs so essential tho the systematic development of mathematics was not recognized in all its importance. Most of the results arrived at, seem to have been obtained in a haphazard way by the tentative method of elaborate trials and subsequent verification. In support of this assertion, a case may be cited where the value of π was assumed to be $\sqrt{10}$, merely on account of the rough agreement of this number with the ratio in question, $\sqrt{10}$ being $3.162+$.

The Pythagorean theorem, likely without any rigourous proof, seems to have been known to the men of this time. In evidence of this, I may quote an instance where the periphery of the 2^{15} sided regular polygon is calculated to a large number of decimal places, giving for the ratio of the periphery to the radius of the circumscribed circle the number

$$3.141\,526\,648\,777\,698\,869\,248.$$

A book which appeared about this time contains a magic square con-

Digitized by Google

taining the numbers from 1 to 400. It seems that this was obtained by the elaborate wearisome method of trials.

I have now passed over the period of years, which, as before said, I might have just as well skipped, during which it is difficult to discriminate things really indigenous from those derived from Chinese sources, and which after all seem to posses nothing but the interest of curiousity.

The mathematics of the old Japanese school properly so-called.

I now pass on to the most important part of the present note, namely the mathematics of the old Japanese school properly so-called, which originated in Japan and had its secluded development under no external influence. This school of mathematics was founded and developed to a considerable extent by a mathematician of the name Seki, who was cotemporaneous with Newton and Leibnitz, in fact, born in the same year as Newton. Seki was surely a man of great mathematical ability and originality. He had a tutor, of whom he might have said what Gauss is said to have spoken of his tutor Pfaff. Seki's success as the founder of the new school of mathematics is to be traced to the great weight which he, unlike his predecessors, laid on the rigour of the methods and proofs. It is he who gave the first rigourous geometrical proof of the Pythagorean theorem.

The remarks which I have made concerning the various difficulties attending the study of the subject of this note, can not possibly be applied with greater force than to the works of Seki. Most of his discoveries were kept in secret among a few of his disciples in his life time, and were only published from time to time in fragmentary form after his death. I believe that there are still some which have not been published and that some have been totally lost.

Seki seems to have begun his work on algebra by improving the clumsy notations and cumbrous operations with the so-called bamboo-rods which were in vogue up to his time. He was so far successful in as much as every thing and every operation could be written down, so that he could dispence with every thing but pen and paper. Connected herewith, he introduced an improved notation, the advantage of which may be exemplified by the transition from writing the same letter repeatedly in succession to the exponential notation. These happy innovations seem to have lead to numerous important discoveries, including among other things the introduction of imaginary numbers, which resulted in the sudden

Digitized by Google

expansion of the domain of algebra. Seki in his late years was no doubt in possession of most of the algebraic methods which we now-a-days find in a treatise on algebra.

It is difficult to draw any exact line of demarkation between the works of Seki and those of his immediate disciples and successors, as it might imagined from the circumstances mentioned above, under which Seki's discoveries were transmitted to posterity.

Among the discoveries made by Seki, or, if not by himself, by his immediate disciples and successors under the influence of their master's work, may, besides the algebra just mentioned, be enumerated :

1° Some theorems belonging to the theory of numbers;

2° Elementary geometry both plane and solid, with special reference to the theory of regular polygons;

3° Trignometry, accompanied by the construction of the trignometric tables;

4° Elements of analytical geometry;

5° Calculus of finite differences;

6° Some idea of limits, infinites and infinitesimals;

7° The theory, most probably algebraical, of maxima and minima;

8° Summation of a certain class of series;

9° The so-called *principle of circle*, including some methods of rectification, quadrature, and cubature of curves and surfaces.

The so-called *principle of circle* mentioned last, which, in absence of any suitable name, is literally translated from the original, seems to be the climax of Seki's discoveries, and is held by men of the old school as comparable with the discovery of infinitesimal calculus by Newton and Leibnitz. It appears to consist in an ingeneous application of the idea of limits and the summation of infinite series to problems which now-a-days belong to the geometrical application of integral calculus. My opinion is that the so-called *principle of circle* is a name given to the aggregate of the various methods of rectification, quadrature and cubature of curves and surfaces without the formal use of differential and integral calculus, very much like the methods which were in vogue prior to the time of Bernoulli and Euler, such as those to be found in the work of Wallis. No doubt this name was given to the method, because it was first found in connection with the rectification of the circle.

Judging from the figures which the mathematics of Seki's school furnishes for the ratio of the radius of the circumscribed circle to the side of a regular polygon, it seems probable that Seki had found some method

Digitized by Google

of solving binomial equations. The following are some of the figures given :

Number of the sides of a regular polygon.	The corresponding ratio in question.
7	1,152382435 + (*a*)
11	1,714732766 + (*b*)
13	2,0892490734 + (*b*)
17	2,721095575 + (*c*)
19	3,03776691 + (*d*)

(*a*) Greater than $\frac{1}{2}$ in the last decimal place.
(*b*) Less than $\frac{1}{2}$ in the last decimal place.
(*c*) Considerably greater.
(*d*) Slightly greater.

In this connection, it may be remarked that neither Seki nor his followers were in possession of logarithmic tables.

Following the usage prior to his time, Seki calculated the length of the periphery of the 2^{17} sided regular polygon in terms of the radius of the circumscribed circle as unit, and found 3,141592653288992775 9 . . . It is told that the comparison of this number with those already found for the 2^{15} and the 2^{16} sided regular polygons lead Seki to the adoption of

3,141592653 59 (slightly less)

for the value of π. It is to be observed that this number is correct to the last decimal place. There are, however, circumstances which suggest that this was merely a stratagem by which the true path of arriving at the above correct value of π was kept in secret. Most probably he was in possession of an expression of π in the form of an infinite series, derived from the periphery of a regular polygon by making the number of sides infinitely great, by which the value of π can be calculated to any desired degree of accuracy. In support of this, it may be remarked that one of the disciples of Seki calculated the value of π to 49 decimal places, which value is found to be correct to the last figure.

Seki seems to have known something of continued fractions, as we find among his posthumous work such a method as the reduction of quadratic surds to continued fractions; but it is not at all likely that he was in possession of the expression of π in the form of a continued fraction. This may be inferred from the tentative method, by which he arrives at the approximate value of π in the form of a fraction. Beginning with 3 over 1, we have to add either 3 to the numerator and 1 to the denominator,

Digitized by Google

or 4 to the numerator and 1 to the denominator, according as the value of the resulting fraction is greater or less than the true value of π. Continuing this process 113 times, in the course of which we pass through fractions such as $\frac{22}{7}$, we arrive at the well known fraction $\frac{355}{113}$. The expression of π in the form of a continued fraction appears, however, to have been found by one of the men belonging to Seki's school sometime after his death, who gives for an approximate value of π the fraction

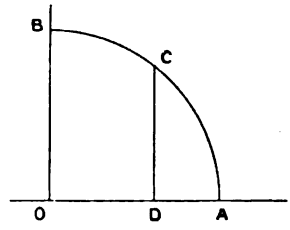
Numerator	428,224,593,349,304,
Denominator	136,308,121,570,117.

This fraction gives the value of π correct to the 29th decimal place.

I have spoken somewhat at length of the work of Seki on the rectification of the circle. It is, however, by no means meant to indicate that his mathematical activity was confined tho this special subject.

I now leave Seki and his immediate disciples, and pass on to speak of some of the men whose works had great influence on the further development of the mathematics of the old school. Foremost among them, stands Yasushima, whose work was mostly done in the latter half of the 18th century. To him is to be attributed a complete theory of integration based upon the summation of infinite series. Yasushima seems to have begun his work in this direction by taking up again the favourite subject of his school, namely the rectification and quadrature of the circle. Unlike his predecessors, who occupied themselves with finding the entire periphery and the entire area of a circle, he showed how to find first the area of any sector and then the length of any are of a circle. In the following, I shall reproduce his method with slight modifications conducive to better understanding.

Let OA and OB be two radii of a circle at right angles to each other.



Draw an ordinate CD parallel to OB. It is required in the first place to find the area OBCD.

Let the radius of the circle be denoted by r and the length of OD by a.

Digitized by Google

Divide OD into n equal parts and through each point of division draw an ordinate parallel to OB. Let these ordinates be numbered in succession from left to right, so that the last, e. g. CD, becomes the nth. Then the length of the mth ordinate will be given by

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{ma}{n}\right)^2}.$$

To free this expression of its radical, it is expanded by means of the binomial theorem, which, by the way, seems to have been known since the time of Seki. The result, as may easily be verified, is

$$r\left[1 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{8}\frac{m^4}{n^4}\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \frac{1}{16}\frac{m^6}{n^6}\left(\frac{a}{r}\right)^6 - \frac{5}{128}\frac{m^8}{n^8}\left(\frac{a}{r}\right)^8 - \frac{7}{256}\frac{m^{10}}{n^{10}}\left(\frac{a}{r}\right)^{10} - \frac{21}{1024}\frac{m^{12}}{n^{12}}\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \ldots\right].$$

Following the usage of his time, Yasushima does not give the general term of the series within the bracket, which may readily be found to be

$$\frac{1.3.5\ldots 2p-3}{2^p.p!}\frac{m^{2p}}{n^{2p}}\left(\frac{a}{r}\right)^{2p}.$$

Multiplying the above expression by $\frac{a}{n}$ and summing with respect to m from 1 to n, we obtain

$$ar\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\Sigma m^2}{n^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{8}\frac{\Sigma m^4}{n^5}\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \ldots\right],$$

where Σ denotes summation with respect to m from 1 to n. It remains only to make n infinite. The works which are said to contain the account of evaluating $\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left(\frac{\sum_1^n m^\lambda}{n^{\lambda+1}}\right)$ were not accessible to me, but it seems to me exceedingly probable that this limiting value was found in the following manner (it is needless to say that this limiting value is equal to $\int_0^1 x^\lambda\, dx$). By the binomial theorem

$$(m+1)^{\lambda+1} - m^\lambda = (\lambda+1)\, m^\lambda + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}\, m^{\lambda-1} + \ldots.$$

Herein put $m = 1, 2, 3, \ldots, n$ in succession, and add the resulting equations side by side. We get

$$(n+1)^{\lambda+1} - 1 = (\lambda+1)\sum_1^n m^\lambda + \frac{(\lambda+1)\lambda}{1.2}\sum_1^n m^{\lambda-1} + \ldots.$$

Digitized by Google

Divide by $n^{\lambda+1}$ and then making n infinite, we obtain

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum^{n} m^{\lambda}}{n^{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda+1}.$$

Thus we obtain finally for the required area

$$ar\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \frac{1}{112}\left(\frac{a}{r}\right)^6 - \frac{5}{1152}\left(\frac{a}{r}\right)^8 - \frac{7}{2816}\left(\frac{a}{r}\right)^{10} - \frac{21}{13312}\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \ldots\right],$$

the general term of the expansion within the bracket being

$$\frac{1.3.5\ldots 2p-3}{2^p.p!.2p+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2p}.$$

Again by subtracting from the area of OBCD just found the area of the triangle OCD, e. g.

$$\frac{a\sqrt{r^2-a^2}}{2} = \frac{ar}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^6 - \ldots\right],$$

and dividing the result by r, we obtain the following expression for the length of the circular arc BC

$$\frac{a}{2}\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{3}{40}\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \frac{5}{112}\left(\frac{a}{r}\right)^6 + \frac{35}{1152}\left(\frac{a}{r}\right)^8 + \frac{63}{2816}\left(\frac{a}{r}\right)^{10} + \frac{231}{13312}\left(\frac{a}{r}\right)^{12} + \ldots\right],$$

the general term of the series within the bracket being

$$\frac{1.3.5\ldots 2p-3.2p-1}{2^p.p!.2p+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2p}.$$

In passing by, it may be observed that the above gives a direct method of expanding arcsin $\frac{a}{r}$.

Yasushima gives a peculiar form to the above series; namely, putting this series equal to

$$\frac{a}{2}\left(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \ldots\right)$$

Digitized by Google

and $\left(\frac{a}{r}\right)^2 = A$, he writes

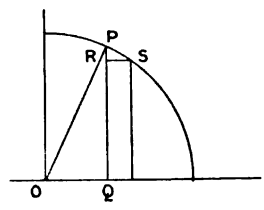
$$\frac{a}{2}\left(1 + \frac{1^2.\,u_0.\,A}{2.\,3} + \frac{3^2\,u_1.\,A}{4.\,5} + \frac{5^2.\,u_2.\,A}{6.\,7} + \frac{7^2.\,u_3.\,A}{8.\,9} + \frac{9^2.\,u_4.\,A}{10.\,11} + \frac{11^2.\,u_5.\,A}{12.\,13} + \ldots\right).$$

Proceeding further on, Yasushima makes a fatal mistake by saying that we may obtain the expression for $\frac{\pi}{4}$ by putting in the above series $a = r$ and $r = 1$, because the resulting series diverges. However this is very instructive, as it shows that even such a prominent man of the old school as Yasushima seems to have had no idea of the convergency of infinite series. Nevertheless a correct expression for $\frac{\pi}{2}$ might have been obtained by dividing the expression of the area of a quadrant by the radius and then putting r equal to unity. By so doing, he might have obtained

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} - \frac{21}{13312} - \ldots - \frac{1.3.5\ldots 2p-3}{2^p.\,p!.\,2p+1} - \ldots.$$

Yasushima also discovered a method of double integration very much on the same line as the method of simple integration exemplified above. All these methods which were still included under the all comprehensive name of the *principle of circle*, were successfully applied to such problems as the finding of the length of an elliptic arc, the common volume of two intersecting cylinders, and the like.

Yasushima's discoveries which seem to have been of the most varied nature, include among other things a complete theory of spherical trigno-



metry. It may also be added that he or one of his immediate disciples found a method for the numerical solution of equations.

I now pass on to Wada, who is held as another giant by men of the old school and who published most of his discoveries early in the beginning of the nineteenth century.

Digitized by Google

Wada's first labour seems to have been directed toward improving the various methods found before his time. To give only an example of his work in this direction, he gives the following improvement on the method of finding the lengh of a circular arc. From the similarity of the triangles OPQ and PSR in the adjoining figure, we have

$$OP : PQ = PS : RS;$$

whence, with the notations already used in giving Yasushima's method, we get

$$\text{arc } PS = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{ma}{n}\right)^2}} \frac{a}{n}.$$

Further, proceeding in exactly the same way as in the above, we obtain the same result as that found by Yasushima. It is interesting to observe that the method, after passing through the various stages of development, has developed itself to something which is not essentially different from the modern method.

In trying to give some account of the works of some of the most prominent of the men of the old school, I might have given examples other than that of the rectification of a circular arc; but I have purposely confined myself to this particular example, in order to give possibly some idea of the various stages through which the development of this peculiar mathematics seems to have passed.

The most important of Wada's contributions to the mathematics of the old school is said to consist in publishing various tables which give numerical values of the coefficients of a large number of infinite series connected with rectification, quadrature and cubature. Wada seems also to have been the first mathematician who applied the principle of inequality to the evaluation of limiting values. He tried also to express the length of the various right lines connected with a circular arc in terms of the circular arc, and was successful to a certain extent. Perhaps he was in possession of inverse trigonometric functions in some form or other.

Wada and some of his cotemporaries occupied themselves with the study of such curves as the cycloid, the catenary and the like, and it seems as if most of the well known properties of these curves were known to them. The other favourite subjects of about this time seem to have been the calculation of the centers of gravity of some simple figures, magics quares and geometrical contact problems more or less complicated.

About the middle of the nineteenth century, logarithmic tables seem to have been introduced from Dutch sources. We are told that some of

Digitized by Google

the men of the old school were hard at work in calculating the common logarithms of numbers, no doubt by some primitive method, as they were not in possession of the logarithmic series.

About this time, some Dutch mathematical books came into the possession of the mathematicians of the old school. Although they must have had great difficulties in reading Dutch, it is conceivable that these books had some influence on the works of these men. There still remains one thing which I should like to mention before quitting the subject of this note. I was told that the theory of determinants and its application to the solution of the system of linear equations were not entirely unknown to the men of the old school.

Before concluding this brief discourse, may I be permitted to repeat once more what I have said in the beginning. I have been speaking of things which are now entirely obsolete and which can have at most historical interest, leaving however the chance that some really valuable things might still be found in those regions of this mathematics through which I have not happened to pass. It was surely a wise policy on the part of the educational authorities that they, in organising the new system of education, put this mathematics of the old Japanese school entirely out of sight, and were anxious to introduce free and unmolested the mathematics which has no schools and whose universal language is intelligible to all the civilized nations.

Digitized by Google

Digitized by Google

LES

MATHÉMATIQUES ET LA BIOLOGIE

PAR

M. Angel GALLARDO (Buenos-Aires).

Au premier abord, il semble y avoir une certaine contradiction dans l'emploi des procédés des Sciences exactes pour l'étude de questions si complexes que les biologiques, qui sont encore vagues et peu précises.

Les applications des méthodes mathématiques à la Biologie ont soulevé, en effet, beaucoup d'objections, et quelques personnes n'y voient que de simples « jeux de nombres ».

Pour ramener les questions biologiques à des problèmes mathématiquement solubles, il faut, en général, les simplifier par des hypothèses plus ou moins nombreuses, et rien n'est plus facile que d'introduire des inexactitudes ou des erreurs dans la simplification d'un phénomène complexe. La plus légère divergence initiale est, en outre, exagérée par la rigide inflexibilité des raisonnements mathématiques et conduit à des résultats absurdes, tandis que le raisonnement ordinaire peut compenser les défauts du point de départ en s'appuyant, à chaque pas, sur l'observation et l'expérience. Le péril augmente par cela même que ces fausses conclusions ont la prétention de s'imposer comme des vérités absolues exprimées par des formules mathématiques pour lesquelles on a un certain respect superstitieux. Quelqu'un a dit, à cause de ces sortes de conclusions, que l'application du calcul des probabilités aux Sciences morales est le scandale des Mathématiques.

Toutes ces objections ne doivent pas être adressées aux méthodes mêmes, mais à la manière de s'en servir, puisque aucun procédé n'est bon s'il est mal employé. Les Mathématiques sont un admirable instrument, mais ne peuvent pas donner plus que ce qu'on y met, et, à cause de leur propre exactitude et de leur propre délicatesse, elles doivent être employées avec la plus grande prudence et la plus grande circonspection.

Digitized by Google

Les procédés des Sciences exactes et, en particulier, les tracés graphiques permettent de présenter sous une forme synthétique un grand nombre de données, soulageant ainsi l'attention qui peut alors s'appliquer à l'observation de relations et de particularités qui, sans cela, seraient passées inaperçues.

Je crois donc que les applications des Mathématiques à la Biologie sont légitimes, pourvu qu'on ait la prudence nécessaire et qu'on ne se propose pas la solution de questions trop compliquées, imparfaitement connues, et qui n'ont rien à gagner d'un traitement exact pour lequel elles ne sont pas encore mûres.

Les problèmes biologiques étudiés mathématiquement sont déjà nombreux, et ils le deviendront chaque jour plus à mesure que les faits d'observation seront mieux connus. C'est, du reste, ce qui est arrivé pour la Physique.

On a appliqué ainsi avec succès les méthodes de la Mécanique et de la résistance des matériaux à l'étude des formes des os et des articulations; les principes de l'Hydraulique à la détermination de la forme et des diamètres des vaisseaux sanguins, etc. Roux et son école de la Mécanique du développement des organismes, Cope et les néolamarckiens américains et beaucoup d'autres savants sont entrés dans cette voie, indiquée il y a déjà assez longtemps par Fick.

Mais je veux attirer spécialement l'attention des mathématiciens qui prennent part à ce Congrès sur les applications des méthodes statistiques à l'étude des problèmes biologiques de la variation et la corrélation des caractères, de l'hérédité et de l'évolution des êtres vivants. L'étude quantitative des organismes a été initiée par Quételet et par Galton dans le terrain anthropologique et constitue aujourd'hui une branche importante de la Biologie, la *Biostatique* ou *Biométrique*. L'étude quantitative des animaux peut être désignée sous le nom de *Zoostatistique*, et celle des végétaux sera la *Phytostatistique*. Il serait trop long de donner une liste bibliographique de tous les articles biostatistiques (près de 150), liste qu'on peut trouver d'ailleurs dans le Livre de Duncker et dans les Travaux de Ludwig.

J'indiquerai seulement ici les noms des personnes qui s'occupent de cette nouvelle direction de recherches dans les différents pays, en laissant de côté les anthropologistes.

En plus de Galton, un des fondateurs de la Biostatistique, et de Peanon, à qui l'on doit les plus grands progrès des méthodes mathématiques, et de ses élèves Beeton, Fawcett, Filon, Hee, Whiteley et

Digitized by Google

Yule, on peut citer en Angleterre les noms de Bateson, Thompson, Vernon, Warren et Weldon pour la Zoostatistique, et de Pledge pour la Phytostatistique.

En Allemagne, Duncker (qui a fait un bon exposé élémentaire de la méthode) et Heincke s'occupent de Zoologie, et W. Haacke, Jost, Vöchting et Weisse de Botanique. Le Professeur Ludwig, en particulier, a beaucoup travaillé sur ce dernier sujet et a trouvé que les tracés graphiques de la variation de la plupart des caractères variables des végétaux présentent des sommets pour les nombres de la série de Fibonacci :

$$\begin{array}{cccccccccccc} (\ldots, & -8, & +5, & -3, & +2, & -1, & +1, & 0, & 1) \\ 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & 21, & 34, & 55, & 89, & 144, & \ldots, \end{array}$$

que les mathématiciens nomment *série de Gerhardt ou de Lamé.*

Aux États-Unis, nous trouvons Blankinship, Brewster, Bullard, Bumpus, Davenport (qui a écrit un Livre élémentaire très pratique) et Field pour la Zoologie, et Lucas pour la Botanique.

Le promoteur des études expérimentales et de la culture des cas de variation normale et tératologique des plantes est l'éminent directeur du Jardin botanique d'Amsterdam, le Professeur H. de Vries, suivi en Hollande par Verschaeffelt et en Belgique par de Bruyker, Mac Leod et Vandevelde.

En Suisse, Amann a écrit en français sur la variation des mousses, et Camerano a étudié en Italie la variation des batraciens.

On s'est peu occupé en France de cette question et je ne connais sur le sujet qu'un article du Professeur Giard et les analyses critiques de Contagne et de Varigny.

Enfin, dans la République Argentine, Lahille a publié des Travaux sur la variation des animaux, et moi-même sur celle des plantes.

En général, la méthode de la statistique de la variation consiste dans la mesure des caractères variables et dans le traitement par les procédés du calcul des probabilités des données numériques obtenues. Pour le calcul, on dispose les nombres en séries, en réunissant toutes les grandeurs égales dans une *classe*. *Fréquence* de la classe est le nombre des mesures égales qu'elle contient. La *moyenne* des variations est donnée par la formule

$$M = \frac{\Sigma(vf)}{\Sigma(f)}$$

dans laquelle v représente la valeur d'une classe et f sa fréquence. La moyenne est l'abscisse du centre de gravité du système des fréquences.

Digitized by Google

Le *mode* est la classe la plus fréquente ou bien l'abscisse correspondant à l'ordonnée la plus longue.

Pour les représentations graphiques, on prend sur l'axe des abscisses des longueurs qui représentent, à une certaine échelle, les classes; et sur les ordonnées orthogonales correspondantes, on prend des longueurs proportionnelles aux fréquences respectives. Le *polygone empirique* de la variation du caractère sera obtenu en reliant par des lignes droites les extrémités des ordonnées successives; il est fermé par les ordonnées extrêmes (quand elles ne sont pas nulles) et par l'axe des abscisses. La limite de ce polygone sera la *courbe de variation* empirique du caractère considéré (*synoptique*, de Contagne), nommée aussi *courbe galtonienne*, du nom de Galton.

L'étude mathématique de ces courbes a réalisé de grands progrès, grâce aux travaux de Pearson, publiés par la Société royale de Londres.

On avait remarqué depuis Quételet et Galton que les courbes de variation dans la plupart des cas suivent à peu près la loi de Gauss de la distribution des erreurs accidentelles et l'on s'efforçait de les ramener toutes à ce type considéré *normale*. Or, cette courbe normale de probabilités coïncide assez exactement avec le tracé graphique du développement du binome de Newton $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^n$, dont l'exposant n est un nombre très grand; elle est par conséquent symétrique, c'est-à-dire que les probabilités des écarts positifs et négatifs sont égales. Mais il y a d'autres courbes de variation nettement asymétriques qu'on ne peut pas ramener à la loi de Gauss.

Pearson a calculé l'équation d'une courbe générale des probabilités qui correspond très approximativement à la binomiale $(p+q)^n$ dans laquelle p et q sont quelconques pourvu que leur somme soit égale à l'unité, symbole mathématique de la certitude dans le calcul des probabilités.

La loi de Gauss n'est donc qu'un cas particulier de celle de Pearson. Il a démontré aussi qu'il y avait une relation géométrique, indépendante de n, entre la courbe de Gauss et la binomiale $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^n$, ce qui justifie l'emploi de l'équation

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}},$$

même pour des valeurs petites de n, qu'on faisait depuis longtemps dans les calculs statistiques.

L'équation générale de la courbe des probabilités est de la forme

$$y = y_0\left(1+\frac{x}{a}\right)^p e^{-\gamma x}.$$

Digitized by Google

Pour les applications à la statistique, Pearson en a déduit cinq types d'après la symétrie ou asymétrie des courbes et l'étendue limitée ou illimitée de la variation.

Type I. — Courbes asymétriques, limitées dans les deux sens

$$y = y_0\left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1}\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2}.$$

Type II. — Courbes symétriques, limitées dans les deux sens

$$y = y_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{m}.$$

C'est un cas particulier de la précédente dans lequel $a_1 = a_2$ et $m_1 = m_2$.

Type III. — Courbes asymétriques, limitées dans un sens

$$y = y_0\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{p} e^{-\frac{x}{d}}.$$

Type IV. — Courbes asymétriques, illimitées dans les deux sens

$$y = y_0 (\cos\theta)^{2m} e^{-\nu\theta},$$

dans laquelle $\operatorname{tang}\theta = \frac{x}{a}$.

C'est la forme la plus fréquente des courbes biologiques asymétriques. Ce type a été étudié par Poisson sous forme de série.

Type V. — Courbes symétriques, illimitées dans les deux sens

$$y = y_0 e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}.$$

C'est la courbe normale ou de Gauss dans toutes ces formules :

y_0, l'ordonnée modale ou la plus grande fréquence qui doit être calculée pour chaque type ;

y, la longueur de l'ordonnée à la distance x de y_0 ;

a, une partie de l'axe des abscisses que l'on doit calculer en fonction des données empiriques ;

e, base du système de logarithmes népériens ;

ε, indice de variabilité (défini plus loin).

Pour les courbes asymétriques, on calcule l'*indice d'asymétrie*

$$A = \frac{d}{\varepsilon},$$

Digitized by Google

en fonction de la distance d entre le mode et la moyenne et l'indice de variabilité ε. Dans les courbes symétriques, le mode et la moyenne coïncident et l'indice A est nul.

Les trois constantes : mode, moyenne et indice de variabilité, caractérisent une distribution de variations d'un type donné.

Pour déterminer à quel type de courbe correspond un polygone empirique donné, Pearson a trouvé une méthode fondée sur la discussion des relations entre les quatre premiers moments du système de fréquences par rapport à l'ordonnée du centre de gravité du système.

Une fois déterminé le type de la courbe théorique, on peut la calculer d'après son équation et les données empiriques de la distribution de fréquences considérée. Pour le calcul des trois premiers types, on a besoin d'employer une Table des valeurs de l'intégrale eulérienne Γ, et pour le calcul du type IV des Tables des lignes trigonométriques. Quant à la courbe normale, elle est aussi tabulée il y a longtemps.

L'accord entre la théorie et l'expérience peut être déterminé par des formules spéciales. Il est, en général, très satisfaisant et la méthode des courbes de probabilités de Pearson peut être appliquée non seulement aux questions biologiques, mais aussi à toutes sortes de problèmes statistiques dans lesquels il y a des courbes asymétriques.

La courbe générale devrait être employée théoriquement de préférence à celle de Gauss dans tous les cas pour lesquels on ignore si le phénomène étudié suit exactement cette dernière loi. Mais, en pratique, on préfère plutôt traiter comme normales les courbes qui n'en diffèrent pas beaucoup.

Toutes les courbes considérées jusqu'ici sont simples et à un seul sommet (*monomorphes,* de Bateson); ce sont des courbes *unimodales*. Quelques courbes, quoique unimodales, doivent être considérées comme composées par deux ou plusieurs courbes simples (*courbes complexes, courbes de Livi,* de Ludwig). Pearson a donné un procédé pour les décomposer quand elles sont formées de deux courbes simples, mais cette méthode n'est pas pratique et l'on n'a pas même encore un critérium pour distinguer une courbe simple d'une complexe. Les courbes complexes prennent naissance de la superposition de plusieurs courbes dans l'étude statistique d'un matériel hétérogène.

Ainsi elles peuvent se produire par un mélange de caractères variables et invariables, par la somme ou différence de courbes de même mode, mais de variabilité différente, ou bien de courbes de modes différents. Ces dernières donnent lieu à des courbes complexes dont le sommet est élargi;

Digitized by Google

quelquefois, en augmentant le nombre des ordonnées ou classes, apparaissent les sommets des composantes.

Nous pénétrons ainsi dans la catégorie des courbes *multimodales* ou à plusieurs sommets (*pleiomorphes,* de Bateson). Ludwig propose de désigner les sommets par les lettres α, β, γ, δ, etc., selon leur importance relative. Il manque encore une théorie mathématique des courbes multimodales et l'on ne sait même pas si elles doivent être toujours envisagées comme l'ensemble de plusieurs courbes simples ou bien si dans quelques cas on peut les considérer comme une seule courbe à plusieurs sommets, susceptible d'être exprimée par une fonction périodique.

Comment peut-on mesurer la variabilité des caractères ? Il est facile de comprendre qu'un caractère très variable donnera lieu à une courbe aplatie, tandis que la variation d'un caractère peu variable sera représentée par une courbe étroite et relevée. L'étendue totale de la variation le long de l'axe des abscisses a été employée par quelques auteurs comme appréciation de la variabilité, mais cette mesure est défectueuse, parce qu'elle ne rend pas compte de la concentration des variations autour de la moyenne. Or, c'est précisément cette concentration qu'il est intéressant d'évaluer, parce que deux caractères peuvent avoir la même étendue empirique de variation avec une distribution des fréquences tout à fait différente et, par conséquent, avec une variabilité différente. Les variations seront plus concentrées pour le caractère moins variable.

Une bonne mesure de la concentration est donnée par la racine carrée de l'écart moyen carré d'Airy, qui constitue ainsi l'*indice de variabilité* le plus employé.

Il est exprimé par la formule

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma(x^2 f)}{\Sigma(f)}},$$

dans laquelle :

x = écart de la moyenne (abscisse du baricentre du système) pour chaque classe ;

f = fréquence de chaque classe.

On peut voir que, pour le cas de la courbe normale, l'indice de variabilité est l'erreur moyenne de la théorie des erreurs. Son carré est inversement proportionnel au double du carré du module de précision. La probabilité d'un écart donné augmente donc à mesure que ε augmente. L'indice de variabilité est représenté par la portion de l'axe des abscisses comprise entre l'ordonnée du baricentre et l'ordonnée d'un des points d'inflexion de la courbe normale.

Digitized by Google

L'indice de variabilité ε est aussi le rayon de giration du système de fréquences autour de l'ordonnée du centre de gravité et, par conséquent, il reste encore une bonne mesure de la variabilité même pour les cas qui ne suivent pas la loi de Gauss.

Pour que ε soit le rayon de giration, il faut supposer les fréquences concentrées le long des ordonnées correspondantes, ce qui arrive, en effet, dans plusieurs cas (variations du nombre d'organes). Mais, dans le cas d'une variation continue (longueurs, poids, etc.), on doit considérer les fréquences uniformément distribuées sur toute la surface comprise dans la courbe de variation. Pearson a été ainsi conduit à calculer les moments de la surface de variation décomposée en rectangles ou en trapèzes, d'où il résulte une légère modification des moments et, par conséquent, du rayon de giration ou indice de variabilité. D'autres mesures de la variabilité sont données par l'écart moyen de Lagrange et par la valeur quartile de Galton, qui n'est autre que l'erreur probable de la théorie des erreurs. Quand il s'agit de courbes normales, ces quantités peuvent être indifféremment employées; mais, pour les autres types de courbes, l'indice de variabilité conserve seul sa signification comme rayon de giration, tandis que l'écart moyen et l'erreur probable ne servent que pour apprécier la variabilité des cas soumis à la loi de Gauss.

L'indice de variabilité est un nombre concret exprimé par la même unité que les valeurs des classes; il ne peut donc servir pour comparer la variabilité de différents caractères. Pour mesurer la variabilité relative, on a proposé l'emploi de *coefficients de variabilité*. Pearson divise l'indice de variabilité par la moyenne et multiplie le quotient par 100 et obtient ainsi un nombre abstrait qui peut être comparé aux coefficients de variabilité d'autres caractères ou d'autres formes. Duncker croit que les coefficients de variation n'ont pas de signification morphologique.

Pour l'étude de la corrélation des caractères, de l'hérédité et de l'évolution, on a trouvé des formules dont la simple énumération sortirait des limites de cette Communication. Les résultats obtenus sont très intéressants et pleins de promesses pour l'avenir.

Avant de terminer, j'attire spécialement l'attention des mathématiciens sur les vides les plus sensibles de la méthode statistique qui sont, selon Duncker, une détermination et une analyse commodes des courbes complexes, et l'investigation de la relation entre les coefficients de corrélation et les courbes individuelles des variations corrélatives.

Nous devons espérer que, grâce à l'usage prudent des nouvelles

Digitized by Google

méthodes pour l'étude des problèmes biologiques de la variation, de la corrélation, de l'hérédité et de l'évolution, ces questions deviendront plus précises et revêtiront un caractère vraiment scientifique, puisque, comme le dit lord Kelvin, « on ne connaît bien un phénomène que lorsqu'il est possible de l'exprimer en nombres ».

Digitized by Google

Digitized by Google

SECTION VI. — ENSEIGNEMENT ET MÉTHODES.

NOTE

SUR

LA CRITIQUE MATHÉMATIQUE

PAR

ZOEL G. DE GALDEANO (SARAGOSSE).

Dans sa Note, M. de Galdeano a indiqué le besoin, dans l'état actuel des Mathématiques, de compléter leur enseignement au moyen d'une nouvelle branche pédagogique, qui pourrait être nommée *Critique mathématique*.

Elle contiendrait des développements historiques et étudierait les liens de parenté qui unissent la génération historique et la génération logique de nos connaissances. Dans une étude synthétique des diverses branches, on viserait à l'enchaînement des idées. On s'y occuperait systématiquement de toutes les méthodes d'une portée très générale, telles, par exemple, que l'introduction d'êtres de pure raison, grâce auxquels la Science s'unifie, se simplifiant et se généralisant à la fois.

Il ne faut pas perdre de vue qu'un plan d'enseignement universitaire doit embrasser non seulement l'enseignement technique qui fait connaître la Science en soi, mais aussi d'autres enseignements dont le but soit de former les futurs professeurs, et de développer en eux des vocations scientifiques inébranlables, capables de se communiquer aux élèves. Les nations ont besoin autant des hommes aptes à appliquer les connaissances théoriques, que des savants dévoués au perfectionnement de l'esprit, source des découvertes dans un avenir plus ou moins lointain.

Digitized by Google

Digitized by Google

LE IPER-ARITMETICHE

E L'INDIRIZZO COMBINATORIO DELL' ARITMETICA ORDINARIA

PAR ALFREDO CAPELLI (NAPLES).

È a tutti ben noto come i progressi dell' analisi matematica abbiano, già da tempo ormai abbastanza lungo, resa necessaria una revisione dei principii fondamentali del calcolo infinitesimale e di quella parte della stessa aritmetica che ha attinenza diretta col concetto d'infinitesimo, cioè specialmente della nozione di numero irrazionale, di limite, ecc. La stessa cosa non può dirsi dei principii dell' algebra propriamente detta che ha le sue origini nel campo dei numeri naturali e razionali, che è quanto dire nel campo delle prime quattro operazioni fondamentali dell' aritmetica. In questo campo abbondano, come del resto è naturale, le tradizioni; ma manca ancora una trattazione veramente sistematica, che potrebbe soltanto essere il frutto di una critica completa e rigorosa. Di quì quel procedere per tentativi, che ha generato una multiplicità di trattati elementari, nessumo dei quali è, forse, riuscito a soddisfare completamente le esigenze degli spiriti più sistematici. Di quì quel bisogno, che si riscontra assai spesso presso gli stessi autori di libri che trattano qualche ramo più elevato dell' analisi, di riassumere brevemente, a guisa d'introduzione, la parte più elementare della Scienza allo scopo di riallacciare direttamente le teorie più elevate alle loro prime origini, cioè alle nozioni stesse di numero e di operazioni. Poco ad essi importa se la via sia tracciata soltanto sommariamente, in modo direi quasi provvisorio, giacchè i riassunti di questo genere non hanno altro scopo senonché di lasciar intravedere al lettore la possibilità di emanciparsi dalle trattazioni tradizionali troppo spesso lunghe e tortuose, e quasi mai sistematiche.

Il carattere di provvisorietà proprio di tutte le introduzioni di questo genere non è dunque altro che l'espressione di un desiderio : il desiderio di dare ai fondamenti dell' aritmetica un indirizzo sistematico che li metta all' unisono coll' indirizzo sistematico dei rami più elevati

Digitized by Google

dell' algebra e dell' analisi. Formulato il desiderio in questo modo, è chiaro come l'indirizzo cercato differir non possa sostanzialmente da quello che informa i moderni progressi dell' algebra e dell' analisi trascendente, voglio dire *l'indirizzo combinatorio,* che ha oggidì la sua manifestazione più caratteristica nel concetto di *gruppo* ed in quello ad esso affine di *invariantività.*

L'importanza delle scoperte di Galois e dei suoi continuatori nella teoria delle equazioni algebriche, e di quelle di altri sommi analisti moderni nel campo delle forme invariantive nonchè in quello dei gruppi discontinui e dei gruppi continui di trasformazioni è, infatti, cosa troppo nota perchè si possa mettere in dubbio il carattere essenzialmente combinatorio della maggior parte dei moderni progressi dell' algebra e dell' analisi.

Le poche cose che mi propongo di dire, hanno appunto per iscopo di dimostrare la possibilità di dare un indirizzo combinatorio affatto analogo anche ai primi fondamenti dell' aritmetica ordinaria e delle iper-aritmetiche in generale. La via da seguirsi a tale oggetto si troverà tracciata nel modo più naturale, quasi spontaneamente, appenachè avremo riconosciuto come i concetti di gruppo e di invariantività si trovino già impliciti (direi quasi allo stato latente) negli stessi primi fondamenti del calcolo algebrico.

Farò precedere un brevissimo riassunto di alcuni risultati, da me già pubblicati altrove (1), sulla questione dell' ordine di precedenza fra le quattro operazioni fondamentali, poichè in essi si ha una novella prova (di indole più elementare) dell' opportunità di dare all' esposizione dei fondamenti dell' aritmetica un nuovo orientamento a base di matematica combinatoria.

I.

1. La miglior prova della mancanza (cui ho accennato fin dal principio) di un esame critico, sistematico ed esanriente, delle questioni relative ai primi fondamenti dell' aritmetica, si ha nell' incertezza stessa dell'ordine secondo il quale debbono definirsi ed introdursi nell' aritmetica razionale le quattro operazioni fondamentali.

La questione dell' ordine di precedenza fra le operazioni si connette con quella dell' ordine secondo il quale si deve successivamente allargare il *campo primordiale* dei numeri, il quale non può ritenersi costituito che da un numero finito di numeri conosciuti empiricamente, p. es. dall' unità e dai numeri 2, 4, 5. Si può anzi dire che le due questioni coinci-

(1) *Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli* (giugno 1900).

Digitized by Google

dano, giacchè un' operazione non si può considerare (almeno dal punto di vista scientifico) come veramente introdotta nel calcolo, se il campo dei numeri ad essa preesistenti non venga al tempo stesso ampliato in modo che la nuova operazione si possa eseguire incondizionatamente, od abbia almeno il massimo sviluppo possibile. Così, p. es. dare la precedenza alla sottrazione od alla divisione significhe rà introdurre nel calcolo prima i numeri negativi e poi i frazionarii, oppure vice versa.

2. Questa questione è stata da me esaminata accuratamente nella mia recentissima pubblicazione testè menzionata, nella quale ho incominciato dal far notare come sia perfettamente in nostro arbitrio di introdurre come prima operazione l'addizione, ovvero la moltiplicazione; giacchè *queste due operazioni sono fra loro indipendenti.* Questa indipendenza non si trova messa nella dovuta luce dai trattatisti. Essa è però manifesta, se le due operazioni si definiscono come segue:

Prodotto di due numeri naturali m ed n è il numero delle coppie che si possono formare combinando in tutti i modi possibili uno qualunque degli elementi di un aggregato di numerosità m con uno qualunque degli elementi di un aggregato di numerosità n.

Somma di due numeri naturali m ed n è il numero che rappresentà la numerosità dell' aggregato che si ottiene riunendo in un unico aggregato gli elementi di un aggregato di numerosità m e gli elementi di un aggregato di numerosità n.

Gli ordinamenti secondo i quali potrebbero introdursi, l'una dopo l'altra, le quattro operazioni fondamentali, sono dunque sei, cioè:

(1)	A,	S,	M,	D.
(2)	A,	M,	D,	S,
(3)	A,	M,	S,	D,
(I)	M,	D,	A,	S,
(II)	M,	A,	D,	S,
(III)	M,	A,	S,	D,

dove ogni lettera è l'iniziale del nome dell' operazione da essa rappresentata.

3. Per ancor meglio giustificare l'epiteto di *fondamentali* attribuito comunemente alle primo quattro operazioni dell' aritmetica, sembra doversi pretendere che l'introduzione di ogni singola operazione produca effettivamente, un allargamento del campo dei numeri ad essa preesistenti.

Digitized by Google

Di quì ho dedotto un primo criterio per decidere circa la preferenza da darsi all' uno piuttostochè all' altro dei sei ordinamenti testè menzionati. Ho posto, cioè, la questione : *è possibile stabilire fra le quattro operazioni fondamentali un ordine di precedenza (secondo il quale esse debbano introdursi nel calcolo l'una dopo l'altra) tale che ogni singola operazione produca un allargamento del campo dei numeri ad essa preesistenti?*

Poichè è agevole riconoscere che soltanto gli ordinamenti (I), (II), (III) soddisfano a siffatta condizione, s'incomincia a stabilire, in base a questo criterio, il principio che : *deve darsi la preferenza a quegli ordinamenti che introducono come prima operazione la moltiplicazione.*

Passando poi dal campo algebrico-aritmetico al campo algebrico-formale, ho potuto stabilire un secondo criterio di preferenza ponendo la questione : *esiste per le quattro operazioni un ordinamento :*

$$O_1, \quad O_2, \quad O_3, \quad O_4,$$

tale che ogni risultato Ω *ottenuto operando sui numeri indeterminati* $a, b, c, d, \ldots, u$, *colle quattro operazioni comunque eseguite, possa anche ottenersi operando dapprima con sole operazioni del tipo* O_1, *poi sui risultati con sole operazioni del tipo* O_2, *e così poi con sole* O_3, *e per ultimo con sole* O_4?

Avendo riconosciuto che fra i sei ordinamenti in questione, soltanto uno, cioè l'ordinamento (III),

$$\text{(III)} \qquad M, \quad A, \quad S, \quad D,$$

può considerarsi come soddisfacente alla condizione ora enunciata, l'incertezza che ancora restava dopo l'applicazione del primo criterio, si trova del tutto eliminata, e si ha al tempo stesso una riconferma, ottenuta per via affatto diversa, del principio già stabilito col primo criterio.

4. L'ordinamento (III) può chiamarsi l'*ordinamento algebrico* delle quattro operazioni fondamentali. Invero, se Ω è un risultato ottenuto operando in un modo qualunque, sulle indeterminate $a, b, c, \ldots, u$, colle quattro operazioni, esso può sempre ricondursi alla forma :

$$\text{(A)} \qquad \Omega = \frac{\sum u - \sum v}{\sum u' - \sum v'},$$

dove ognuno dei termini U, V, U′, V′, sottoposti ai simboli sommatorii,

Digitized by Google

rappresenta un prodotto

$$aa\ldots abb\ldots b\ldots,$$

di fattori scelti fra le lettere $a, b, c, \ldots, u$; e le operazioni che si debbono eseguire per calcolare l'espressione (A) di Ω si succedono appunto secondo l'ordine (III). E, precisamente, si eseguiranno dapprima sole moltiplicazioni, poi sole addizioni, poi al più *due* sottrazioni e per ultimo al più *una* divisione. Ora la forma (A) è appunto, nella sua parte più sostanziale, la forma tipica cui vengono ridotte dagli algebristi tutte le varie funzioni razionali delle variabili $a, b, c, \ldots, u$, allo scopo di riconoscerne l'identità, ossia l'equivalenza dei processi operativi che le rappresentano.

II.

5. Dopoché il campo primordiale dei numeri sia stato esteso, mediante le operazioni di moltiplicazione e di addizione, fino ad abbracciare tutta la serie dei numeri naturali, si presenta la questione della introduzione nel calcolo dei nuovi enti aritmetici destinati a rendere possibili incondizionatamente le due operazioni inverse, sottrazione et divisione.

Noi possiamo distinguere tre modi diversi di introdurre nell' aritmetica i numeri negativi o frazionarii.

Il primo metodo ha per base l'intuizione diretta di una certa particolare categoria di grandezze; p. es. l'intuizione geometrica dei segmenti di una retta, mediante la quale noi stabiliamo p. es. l'esistenza di un segmento che è la n^{ma} parte di un segmento dato.

Il secondo metodo, di indole puramente algebrica, o meglio algoritmica, consiste nel chiamare numeri negativi o frazionarii certi simboli composti coi simboli dei numeri naturali, pei quali si definiscono opportunamente le operazioni di addizione e di moltiplicazione. Questi simboli hanno la loro giustificazione nel fatto di rendere possibili incondizionatamente le quattro operazioni fondamentali, senza mai condurre a contradizioni nel campo dei numeri naturali preesistenti.

Nè l'uno, nè l'altro di questi due metodi può dirsi però pienamente soddisfacente; soltanto la riunione o fusione di entrambi potrebbe forse in quelche modo soddisfare. Il primo infatti ha il pregio della spontaneità (benchè anche da questo lato si possa rimproverargli l'indole troppo particolare dell' intuizione da cui è dedotto), ma non soddisfa completamente l'algebrista, in quanto presuppone dei postulati, di origine intuitiva, che non sono affatto necessarii a stabilire la teoria puramente algoritmica

Digitized by Google

dei nuovi numeri. Il secondo è sufficiente, di per sè solo, a dare tutto il rigore desiderabile senza premettere postulati di sorta alcuna, e soddisfa quindi pienamente l'algebrista puro. Se però si tien conto del fatto che l'oggetto finale dell' algebra è poi sempre quello di servire alla risoluzione dei problemi nati dall' intuizione, si richiede poi, affinchè l'algebra da esso costruita si possa applicare a cosiffatti problemi, una interpretazione accurata dei processi algoritmici nel campo dell' intuizione (p. es. geometrica) cui essi problemi si riferiscono.

Se ora si consideri che il numero ha la sua genesi, o meglio la sua estrinsecazione naturale, nell'*intuizione combinatoria* (1) e che, d'altra parte, l'intuizione combinatoria si può riguardare come la madre di ogni altro particolare genere d'intuizione fornito dal mondo esteriore, o, almeno, come il tramite naturale per il quale ogni specie d'intuizione può rendersi suscettibile di essere sottoposta al calcolo algebrico; se si considera tutto ciò, è agevole persuadersi che, come lo stesso concetto di numero ha la sua origine nei più semplici fatti combinatorii, così anche *le operazioni fondamentali dell'aritmetica debbono introdursi in base alla necessità di risolvere i problemi più elementari dell'intuizione combinatoria.* La loro applicazione a qualsiasi altro particolare genere d'intuizione non presenterà allora più alcuna difficoltà, giacchè, come si è detto, l'intuizione combinatoria è come un'*intuizione primordiale* preesistente a tutte le altre e da esse inseparabile.

6. Una stessa scienza può dar luogo a diverse intuizioni combinatorie concrete, a seconda che si tratti di una o di un'altra delle questioni ad essa attinenti. Noi dobbiamo però riguardare come matematiche, soltanto quelle questioni la cui corrispondente intuizione combinatoria sia suscettibile di essere sottoposta ad un calcolo aritmetico od *iper-aritmetico* (spiegheremo meglio più tardi il significato preciso di questa locuzione).

Tale calcolo, ove esso sia possibile, è caratterizzato :

1° Da un certo insieme J di oggetti o unità che voglia dirsi :

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \ldots,$$

generalmente parlando in numero infinito. Sono questi gli oggetti semplici (elementi) di cui si occupa quel particolare ramo di scienza che ha dato luogo all'intuizione combinatoria astratta che si deve sottoporre al calcolo.

2° Da una certa *legge di composizione* Γ, in virtù della quale due oggetti qualunque U_i ed U_j dell'insieme J possono *comporsi* dando origine

(1) Vedi la definizione di numero data nella Nota sopra citata.

Digitized by Google

ad un nuovo oggetto che si indicherà con U_iU_j, ovvero con U_jU_i, a seconda dell'ordine con cui si fa il composto. Il nuovo oggetto U_iU_j dev'essere ben determinato ed appartenere allo stesso insieme J. La legge di composizione può essere dedotta direttamente dall'intuizione concreta che ha dato origine all'intuizione combinatoria astratta; ma può anche essere stabilita artificiosamente in base alla legge delle equivalenze di cui ora parleremo.

3° Da una certa *legge di equivalenza* E (legge dei *valori*) in virtù della quale certi aggregati [che noi possiamo qui (¹) ritenere costituiti da un numero finito di oggetti dell'insieme J] vengono dichiarati equivalenti cioè aventi *lo stesso valore*. Si dirà che due aggregati qualunque H e K formati con oggetti di J hanno la stessa importanza, o, meglio, lo stesso valore, nell'ordine di idee prestabilito dalla scienza di cui si tratta, se sia lecito, finchè si resta nel detto ordine di idee, di sostituire l'uno all'altro tutte le volte che occorra servirsi dell'uno di essi.

7. I valori dei singoli aggregati H, K, ..., che si possono formare con oggetti di J, si rappresenteranno con dei simboli, p. es. letterali minuscoli a, b, c, ..., α, β, γ, ..., che si chiameranno *numeri-valori* o anche semplicemente *numeri;* giacchè *il concetto di valore si può riguardare come una estensione del concetto di numero.* L'uguaglianza $\alpha = \beta$ fra i simboli numerici α, β rappresentanti risp. i valori degli aggregati H, K, significherà che i due aggregati H e K sono fra loro equivalenti.

8. Passiamo ora ad occuparci delle condizioni cui debbono soddisfare le due leggi Γ ed E, affinchè sia possibile di costruire, per i numeri-valori rappresentanti gli aggregati formati con elementi di J, un calcolo aritmetico ad iper-aritmetico, o, come anche diremo più brevemente, un'*iper-aritmetica,* la quale, ove ne sia dimostrata l'esistenza, verrà da noi designata col simbolo [J, Γ, E].

Noi vedremo che le due leggi Γ ed E, oltrechè soddisfare, ciascuna di per sè, a certe eventuali condizioni sue proprie, devono anche soddisfare a certe condizioni che legano l'una all'altra, cosicchè *esse non sono fra loro indipendenti.*

III.

9. La matematica combinatoria deve innanzi tutto occuparsi di ricercare quali possano essere le leggi di equivalenza E matematicamente

(¹) Giacché ci occupiamo soltanto di numeri razionali.

Digitized by Google

accettabili, cioè soddisfacenti a certi postulati che l'esperienza ha insegnato doversi ammettere in qualsiasi scienza in quanto essa sia suscettibile di una trattazione matematica.

Il *primo* e più semplice postulato di qualsiasi legge matematica di equivalenza si è evidentemente che: *due aggregati dichiarati equivalenti ad un terzo esser debbono dichiarati equivalenti fra loro.* Se questo postulato è verificato, ed α, β, γ siano tre numeri-valori qualisivogliano, dalle uguaglianze $\alpha = \gamma$ e $\beta = \gamma$ sarà lecito di dedurre $\alpha = \beta$.

Il *secondo* postulato è : *se i due aggregati* A *e* B *sono equivalenti fra loro, ed* H *è un altro aggregato qualunque, l'aggregato* A, H *che nasce dalla riunione degli oggetti di* A *e di* H, *è equivalente all'aggregato* B, A *che nasce dalla riunione di* B *e di* H. Questo postulato è di grande importanza, perchè, ove esso sia soddisfatto, ci sarà lecito definire la *somma* di due numeri-valori come segue : *per somma* $\alpha + \beta$ *di due numeri valori* α *e* β, *s'intende quel numero che rappresenta il valore dell' aggregato ottenuto dalla riunione di un aggregato di valore* α *e di un aggregato di valore* β.

Dall' essere soddisfatto questo postulato non ne viene di conseguenza che sia anche necessariamente soddisfatto il postulato reciproco. Quest'ultimo deve quindi assumersi come un terzo postulato, cioè : *se l'aggregato* A, H *è equivalente all' aggregato* B, H, *è l'aggregato* A *equivalente all' aggregato* B.

Conveniamo di dire che un aggregato K è multiplo di un aggregato H. secondo il numero naturale n, quando K sia stato ottenuto dalla riunione. di n aggregati tutti simili ad H, cioè formati da unità equivalenti, una per una, alle unità di H. Possiamo dopo ciò enunciare, un *quarto* postulato come segue : *se due equimultipli degli aggregati* A *e* B *sono equivalenti, anche* A *e* B *sono fra loro equivalenti.* L'importanza di questo postulato apparirà in seguito.

10. Venianmo ora alla legge di composizione Γ considerata in relazione alla legge E. Essa deve soddisfare alla condizione che *se* U *ed* U' *sono due elementi di* J *fra loro equivalenti, e* V *è un elemento qualunque di* J, *i due composti* UV *ed* U'V *esser debbono fra loro equivalenti. Lo stesso dicasi dei due composti* VU *e* VU'. Pertanto, per caratterizzare la legge Γ, basta définire, sceti a piacere U e V fra gli oggetti non equivalenti di J, quello di questi stessi oggetti che è équivalente ad UV.

Più generalmente, *se* $U_1, U_2, \ldots, U_m$ *e* $V_1, V_2, \ldots, V_n$ *sono due aggregati qualisivogliano formati con oggetti di* J, *tali che la legge*

Digitized by Google

dei valori E *riconosca l'equivalenza*

$$U_1, U_2, \ldots, U_m = V_1, V_2, \ldots, V_n,$$

e C *è un elemento qualunque di* J, *la legge di composizione dev' essere tale che anche le equivalenze*

$$U_1 C, U_2 C, \ldots, U_m C = V_1 C, V_2 C, \ldots, V_n C$$

e

$$C U_1, C U_2, \ldots, C U_m = C V_1, C V_2, \ldots, C V_n$$

siano fra quelle riconosciute dalla legge E.

Se sono soddisfatte queste condizioni, che possiamo rappresentare simbolicamente con

$$\text{(B)} \qquad EC = E, \qquad CE = E,$$

possiamo définire il prodotto di due numeri-valori α, β come segue : *per prodotto* $\alpha\beta$ *dei due numeri* α, β *si intenderà il numero che rappresenta il valore dell' aggregato che nasce dal comporre un aggregato di valore* α *con un aggregato di valore* β. Per composto dei due aggregati intendiamo, naturalmente, l'aggregato di tutti gli oggetti che nascono dal comporre uno qualunque degli elementi del primo aggregato con uno qualunque degli elementi del secondo.

11. Se, essendo U, V, W tre elementi qualisivogliano di J, il significato di U (VW) sia equivalente a quello di (UV) W, si dirà che la legge Γ gode della proprietà *associativa*. E' manifesto che in tal caso, nell' iper-aritmetica [J, Γ, E] il prodotto di più numeri godrà della proprietà associativa, come nell' aritmetica ordinaria.

Se poi, qualunque siano i due elementi U, V di J, il significato di UV sia equivalente al significato di VU, si dirà che la legge Γ gode della proprietà *commutativa*. In tal caso il prodotto di due o più numeri qualisivogliano sarà, nell' iper-aritmetica [J, Γ, E] indipendente dall'ordine dei fattori.

La proprietà *distributiva* del prodotto di due numeri sussisterà poi in ogni caso, purchè la legge Γ soddisfi alle condizioni (B).

12. Se la legge Γ gode della proprietà associativa, si potrà dire che gli elementi di J formano un *gruppo*, rispetto alla legge Γ, nel senso attribuito oggi a questa parola nella teoria delle operazioni (p. es. nella teoria delle sostituzioni).

In particolare : *se* J *è un ordinario gruppo abeliano, soddisfacente*

Digitized by Google

alle condizioni (B), *esso darà origine ad un' iper-aritmetica nella quale l'operazione di prodotto godrà, come nell' aritmetica ordinaria, della proprietà associativa, commutativa e distributiva.*

E facile riconoscere che ogni ordinario gruppo abeliano darà luogo effettivamente a quelche iper-aritmetica; giacchè basterà p. es. di assumere come legge E la legge che non riconosce alcuna equivalenza fra aggregati che non siano simili.

Da ciascuna delle (B) segue poi che, affinchè una legge E sia associabile ad un gruppo J allo scopo di dare origine ad un' iper-aritmetica, è necessario che il gruppo J sia *isomorfo olvedricamente*, ad un gruppo di sostituzioni, fra gli oggetti di I, il quale lasci inalterato il sistema delle equivalenze riconoscinte dalle legge E.

Questo risultato si può esprimere brevemente dicendo che *il sistema delle equivalenze riconosciute dalla legge* E *dev'essere invariante per tutte le sostituzioni di un gruppo isomorfo al gruppo* I.

13. Quando I rappresenta non solamente un insieme di oggetti, ma anche un gruppo, l'iper-aritmetica, originata da I e da un certo sistema di equivalenze E, si potrà rappresentare più semplicemente con [I, E].

Dalle cose dette si può ora dedurre il teorema : *se I è un gruppo qualunque, ed* E *un sistema qualunque di equivalenze, fra gli aggregati formati cogli elementi di* I, *esiste sempre un' iper-aritmetica* [I, E′], *nella quale l'operazione di moltiplicazione gode della proprietà associativa e distributiva* (*ed anche della commutativa, se* I *è abeliano*), *essendo* E′ *un sistema di equivalenze, che contiene in sè il sistema* I. Basterà infatti aggiungere ad E tutte le equivalenze deducibili da quelle di E colle sostituzioni dell'uno e dell'altro gruppo Γ′ isomorfo a Γ, di cui si è sopra parlato.

IV

14. Nelle cose sin quì dette si trovano tracciate le linee generali per la costruzione dei fondamenti, così delle infinite iper-aritmetiche, come dell'aritmetica ordinaria che ne è un caso affatto particolare. Questo modo di stabilire i primi fondamenti ha il grande vantaggio di mettere in piena luce l'indole combinatoria della genesi dell'aritmetica; cioè come essa derivi spontaneamente da alcuni fatti combinatorii ad essa preesistenti. Per questa via viesce manifesto come il concetto di *gruppo* e quello ad esso affine di *invariantività*, che soltanto dopo tanti secoli, anzi, si potrebbe dire, quasi soltanto ai nostri giorni, si sono imposti come i

Digitized by Google

fattori più essenziali dei moderni progressi dell'alta algebra, erano invece già latenti negli stessi primissimi principii dell'aritmetica, dai quali sono organicamente inseparabili. È qui più che mai il caso di dire, col proverbio, che *gli estremi si toccano*.

Pertanto è fuori di dubbio che il premettere all'insegnamento dell'aritmetica, a guisa di preparazione propedeutica, alcuni pochi principii di *matematica combinatoria,* per gettare subito dopo i fondamenti dell'aritmetica stessa in modo conforme alla sua *genesi combinatoria,* è la via più breve e più sicura per giungere con metodo naturale ed uniforme alle vette più eccelse dell'algebra odierna; a quelle vette sulle quali l'elemento combinatorio brilla, già da oltre mezzo secolo, di luce meridiana.

15. Aggiungeremo ancora, prima di chiudere, che, per il caso particolare dell'aritmetica ordinaria (estesa ai numeri negativi e frazionarii), l'insieme I è costituito da due serie di elementi :

$$U_1^{(o)},\quad U_2^{(o)},\quad U_3^{(o)},\quad \ldots$$

ed

$$U'_1,\quad U'_2,\quad U'_3,\quad \ldots.$$

La legge dei valori E è rappresentata dalle equivalenze :

$$U_i^{(o)},\quad U'_i \equiv O \quad , \quad (i = 1, 2, 3. \ldots)$$

dove O rappresenta il *niente*, cioè l'aggregato fittizio che non contiene alcun oggetto, e dalle equivalenze :

$$U_1^{(o)} \equiv U_n^{(o)},\quad (U_n^{(o)})'_{,}\quad (U_n^{(o)})''_{,}\quad \ldots,\quad (U_n^{o})^{(n-1)}$$

dove con $(U_n^o)'_{,}\,(U_n^o)''_{,}\ldots$ s'intendono oggetti equivalenti ad $U_n^{(o)}$.

Quanto poi alla legge di composizione Γ, essa è rappresentata necessariamente (come si potrebbe dimostrare invocando il postutato IV° sulle leggi di equivalenza) dal gruppo abeliano :

$$U_m^{(\mu)}\, U_n^{(\nu)} \equiv U_{mn}^{(\mu+\nu)} \quad , \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

dove $(\mu + \nu)$ rappresenta quello dei due numeri o ed 1 cui è congrua la somma $\mu + \nu$ (mod. 2).

Nota 1ª. — Al momento in cui sta per passare alla stampa questa comunicazione da me fatta nell' Agosto 1900, mi sia lecito di aggiungere che il metodo da me proposto per la trattazione dei primi fondamenti dell'aritmetica ordinaria è già stato da me stesso trasportato nel campo

Digitized by Google

della pratica nel primo fascicolo, che già siè pubblicato, delle mie *Istituzioni di Analisi algebrica* (Napoli, editore B. Pellerano, 1902).

Sarebbe desiderabile che si facesse altrettanto per i *Quaternioni*, ormai già tanto conosciuti, che rappresentano, fra le iper-aritmetiche, uno dei casi particolari più semplici ed interessanti.

Nota 2ª. — Mi permetto anche di aggiungere, sia pure a semplice titolo di curiosità, un' osservazione da me fatta posteriormente alla mia comunicazione; cioè che l'ordinamento algebrico delle quattro operazioni fondamentali:

Moltiplicazione, Addizione, Sottrazione, Divisione

è in certo modo suggerito, pur restando nel campo dei numeri naturali *propriamente detti* (cioè dei numeri interi e positivi, esclusi l'unità e lo zero) dall'ordine di successione quantitativa:

$$ab \gtreqless a + b \gtreqless a - b \gtreqless \frac{a}{b}.$$

Queste relazioni sono infatti sempre vere se a e b sono due numeri naturali propriamente detti, per i quali siano possibili le quattro operazioni nel campo di questi stessi numeri.

Digitized by Google

SUR

LES DIVERS MODES D'APPLICATION

DE LA

MÉTHODE GRAPHIQUE A L'ART DU CALCUL.

CALCUL GRAPHIQUE ET CALCUL NOMOGRAPHIQUF,

PAR MAURICE D'OCAGNE (PARIS).

L'art du calcul, en tant qu'il intervient dans les applications d'ordre technique, a été complètement renouvelé, dans la seconde moitié du siècle qui finit, par la généralisation de l'emploi des méthodes graphiques.

Cette rapide et vaste extension porte en soi la preuve des avantages pratiques qui s'attachent à de telles méthodes. Les hommes techniques, soucieux avant tout d'économiser leur temps et leur peine, ne se laissent point séduire par la beauté intrinsèque des théories qu'on leur propose; arriver par la voie la plus commode, la plus rapide, où se rencontrent le moins de chances d'erreurs, au résultat dont ils ont besoin, telle est, en cet ordre d'idées, leur seule préoccupation. La faveur si générale qu'ont trouvée auprès d'eux les procédés graphiques prouve donc que ceux-ci sont doués de tels avantages. Aussi, peu à peu, une place a-t-elle été faite à ces procédés dans l'enseignement des écoles techniques. Mais ici, les applications ont, peut-on dire, précédé la théorie. C'est des solutions particulières imaginées en vue de problèmes spéciaux que se sont dégagés à la longue les principes généraux susceptibles d'un mode d'exposition didactique. Il a pu en résulter certaine confusion d'idées que l'on rencontre dans divers écrits, qu'il nous a déjà été donné de signaler à plusieurs reprises, mais sur laquelle nous croyons utile d'insister de nouveau afin, si possible, de la dissiper définitivement.

L'idée dont on doit se bien pénétrer pour éviter cette confusion, c'est que les divers procédés de calcul qui reposent sur l'emploi du graphique

Digitized by Google

dérivent de deux modes généraux, parfaitement distincts l'un de l'autre, de figurer par le dessin les opérations arithmétiques dont l'ensemble exécuté sur certains nombres constitue le calcul.

En premier lieu, *ayant représenté les divers nombres intervenant dans le calcul par certains éléments géométriques aisément mesurables dont ils constituent précisément les valeurs, avec une certaine unité convenue, on peut effectuer sur ces éléments une construction géométrique aboutissant à un élément de même espèce dont la grandeur mesurée avec la même unité fasse précisément connaître le résultat de calcul cherché.*

Ces éléments géométriques seront presque toujours des segments de droite, parfois des angles, plus rarement des aires simples, particulièrement des aires rectangulaires.

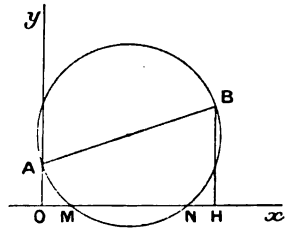
L'ensemble de ces procédés constitue le *Calcul graphique proprement dit* dont, en 1840, sous le titre bien choisi de *Calcul par le trait*, Cousinery a, pour la première fois, donné un exposé de quelque généralité.

A titre d'exemple, voici une élégante solution par le trait, due à M. Lill, de l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0.$$

Ayant pris deux axes rectangulaires Ox et Oy, marquons sur l'axe Oy

Fig. 1.



le point A dont l'ordonnée est égale à l'unité de longueur choisie, puis le point B dont les coordonnées, mesurées avec cette unité, sont

$$OH = -p, \qquad HB = q.$$

Le cercle décrit sur AB comme diamètre coupe l'axe Ox en des points dont les abscisses OM et ON, mesurées toujours avec la même unité, sont les racines de l'équation proposée.

L'application la plus vaste, la plus importante et la mieux coordonnée

Digitized by Google

du calcul graphique est celle qui vise la recherche des conditions de stabilité et de résistance des constructions et qui a donné naissance à la *statique graphique* de Culmann.

Encore convient-il de remarquer le caractère propre de cette branche spéciale du calcul graphique. Ici, on n'a pas à substituer, comme dans le cas général, à des nombres soumis au calcul, des segments de droite mesurés par ces nombres, sur lesquels on ait à effectuer une certaine construction. Les données sont fournies sous la forme même de tels segments dont non seulement la longueur mais encore la position relative intéresse la question. L'objet de la statique graphique est de déduire de ces données graphiques certains résultats de même forme par des tracés dérivant systématiquement de certaines notions fondamentales comme le polygone des forces et le polygone funiculaire. Ces résultats ne seraient atteints sans cela qu'au prix de calculs longs et fastidieux dont les tracés effectués fournissent l'équivalent graphique et, par là, le sujet se rattache au calcul général par le trait; mais la question, comme on voit, est d'essence un peu différente.

Passons au second mode d'intervention de la méthode graphique dans le domaine du calcul. Il ne s'agit plus ici de combiner par une construction des éléments géométriques dont les grandeurs représentent des nombres soumis à certain calcul, mais de fournir une sorte d'image des lois mathématiques énoncées symboliquement dans les formules algébriques, de façon à avoir, par une simple lecture, le résultat fourni par ces formules pour des données numériques quelconques.

On conçoit que *si l'on considère les cotes d'un système simplement infini d'éléments géométriques quelconques* (*points, droites, courbes*) *comme les valeurs pouvant être attribuées à une variable intervenant dans une équation, et si les systèmes cotés correspondant aux diverses variables liées par cette équation coexistent soit sur un même plan, soit sur divers plans superposés dont on peut faire varier la position relative, le lien constitué entre ces variables par l'équation pourra se traduire par une relation simple de position entre les éléments cotés correspondants, en sorte qu'étant connues les valeurs de toutes ces variables moins une on n'aura, pour avoir celle de la dernière, qu'à faire une lecture sur le tableau formé par l'ensemble des systèmes cotés en observant la relation de position qui équivaut à l'équation considérée.*

Par exemple, si trois systèmes de lignes cotées coexistent sur un même plan, la relation de position la plus simple à établir entre lignes prises

Digitized by Google

respectivement dans ces trois systèmes sera de passer par un même point. Les cotes correspondantes satisferont alors à une certaine équation dont on aura ainsi la représentation.

L'ensemble de ces systèmes d'éléments cotés, complété par la connaissance de la relation de position à établir entre eux, constitue un *abaque* ou *nomogramme* (1) de l'équation proposée. La *Nomographie* fait connaître tous les types possibles de nomogrammes applicables à des équations à un nombre quelconque de variables (2).

Notons en passant que cette façon très générale d'envisager les nomogrammes permet de classer parmi eux les règles à calcul si répandues aujourd'hui dans la pratique (3).

On voit assez, après ce qui vient d'être dit, en quoi le calcul nomographique se différencie du calcul graphique proprement dit : voici, par exemple, pour rendre les idées plus claires, une solution nomographique de l'équation du second degré écrite plus haut :

Aux valeurs de p correspondent les cotes des points de l'axe de gauche de la *fig.* 2, aux valeurs de q les cotes des points de l'axe de droite, aux valeurs des racines positives les cotes des points de la branche d'hyperbole, points obtenus d'ailleurs individuellement, pour une cote donnée, par une construction linéaire des plus simples (4). La relation de position consiste dans l'alignement des points (p), (q) et (z) sur une même droite.

Alors que le calcul graphique exige une épure pour chaque état particulier des données, le calcul nomographique fournit à la fois le résultat pour tous les états possibles des données, entre les limites, bien entendu, des graduations du nomogramme.

Ce n'est pas à dire qu'il existe entre ces deux genres de solution une

---

(1) Le terme d'*abaque,* proposé d'abord pour les tableaux graphiques offrant la disposition d'un damier (ἄβαξ), s'est trouvé, par l'usage, étendu à toute espèce de mode de représentation cotée des équations. M. le professeur Schilling, de l'Université de Göttingen, qui a puissamment contribué à faire connaître la théorie nouvelle en Allemagne (et qui a même publié en sa langue un résumé de l'Ouvrage cité ci-dessous), a proposé de substituer à ce terme celui de *nomogramme,* étymologiquement bien plus général. Nous nous rallions bien volontiers à cette proposition qui n'est venue à notre connaissance qu'au moment de l'impression de la présente Note (janvier 1902).

(2) *Traité de Nomographie,* par MAURICE D'OCAGNE; Paris, Gauthiers-Villars, 1899.

(3) *Loc cit.,* Ch. V, Sect. II.

(4) *Loc. cit.,* p. 184.

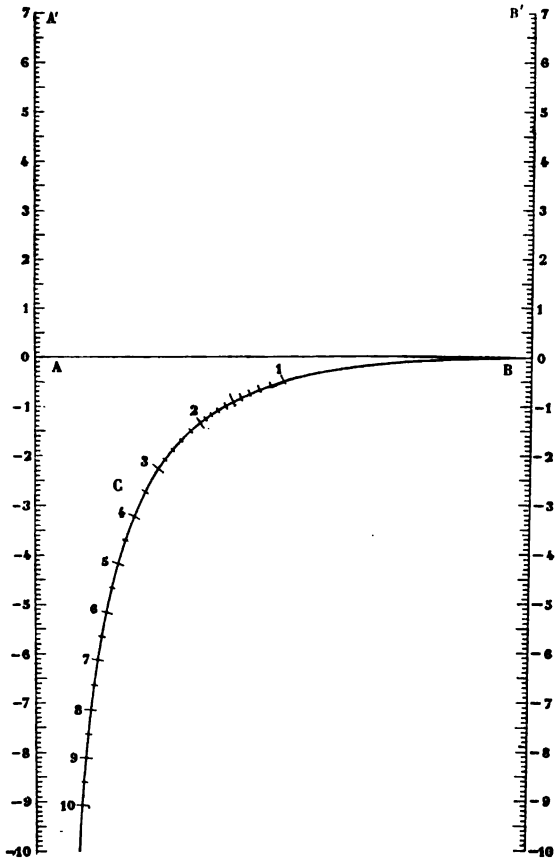
Digitized by Google

barrière infranchissable rendant impossible la réduction de l'un à l'autre. En considérant les lieux géométriques des points qui interviennent dans une construction lorsque, conservant la même valeur pour une des données, on suppose que les autres varient, on est amené à un nomogramme. Un exemple bien simple précisera ce qu'il faut entendre par là. Soit à construire la formule

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Prenant sur l'axe Ox le segment OA $= x$; sur l'axe Oy, perpendiculaire

Fig. 2.



au premier, le segment OB $= y$, et élevant en A et B, respectivement à Ox et à Oy, des perpendiculaires qui se coupent en P, on a OP $= z$. Or, pour x restant constant, le point P décrit une perpendiculaire à Ox;

Digitized by Google

pour y constant une perpendiculaire à Oy; pour z constant un cercle de centre O. De là un abaque constitué par un quadrillage à axes parallèles à Ox et à Oy sur lequel sont tracés des cercles de centre O.

On ne peut pas dire que réciproquement tout nomogramme soit de nature à donner naissance à une construction par le trait, attendu d'une part qu'il y intervient souvent des lignes autres que la droite ou le cercle, d'autre part que des graduations ne sont pas toujours réductibles à de simples mesures de segments de droite ou d'angles, les seules qui soient admissibles sur une *épure*. Ces graduations peuvent dériver de certaines fonctions transcendantes, de la fonction logarithmique en particulier, ou même de certaines lois purement empiriques ([1]), ce qui, par parenthèse, permet à la Nomographie de parcourir un champ bien plus étendu.

Mais s'il est possible d'établir des ponts d'un domaine à l'autre, il n'en reste pas moins acquis qu'ils sont essentiellement distincts. Il est certes bien naturel que l'analogie du but poursuivi d'une part par le calcul graphique, de l'autre par le calcul nomographique, les rapproche parfois dans les programmes d'études des écoles techniques; mais il convient, pour le bon ordre et la logique, de maintenir à chacun d'eux son autonomie propre en faisant ressortir nettement la différence de leurs points de vue.

([1]) *Loc. cit.*, Ch. III, Sect. IV.

Digitized by Google

SUR L'UTILITÉ

DE LA

PUBLICATION DE CERTAINS RENSEIGNEMENTS

BIBLIOGRAPHIQUES EN MATHÉMATIQUES

PAR M. ED. MAILLET (PARIS).

Il y a en Mathématiques un grand nombre de sujets à traiter, que l'on peut aborder en ne lisant qu'un nombre restreint de Mémoires ou Livres. L'indication de ces sujets et des Mémoires ou Livres correspondants pourrait économiser beaucoup de temps à bien des Mathématiciens.

D'une part, ceux qui désirent s'occuper de plusieurs branches des Mathématiques le feraient avec plus de facilité. Des indications de ce genre pourraient éviter à quelques-uns l'ennui de faire des recherches bibliographiques inutiles, ou de s'apercevoir après coup que les résultats qu'ils ont obtenus sont déjà connus en tout ou en partie. Ce serait en tout cas pour eux une économie de temps.

D'autre part, en présence du développement croissant des Travaux mathématiques, bien des amateurs et des débutants qui ont d'autres occupations, qui sont parfois effrayés et rebutés par les recherches bibliographiques, et sont comme perdus dans une bibliothèque un peu considérable, s'ils en ont une à leur disposition, qui lisent un peu au hasard et qui ont beaucoup de peine pour trouver un sujet intéressant à traiter, sont conduits à abandonner l'étude des Mathématiques ou n'arrivent à rien.

Les indications dont nous avons parlé plus haut éviteraient à ces amateurs et à ces débutants les lectures en partie inutiles, les tâtonnements et le découragement qui peut en résulter. Elles pourraient développer leur goût pour les Mathématiques, surtout s'ils réussissent une première fois, et augmenter leur nombre.

Les démarches personnelles en vue de renseignements verbaux peuvent bien remédier en partie à ces inconvénients; mais les amateurs et surtout

Digitized by Google

les débutants ne savent pas la plupart du temps qui consulter; de plus les mêmes renseignements, une fois publiés, s'adresseraient à tous les Mathématiciens et non à un seul.

On a déjà fait bien des choses dans cette voie : il nous suffira de citer par exemple le *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques,* le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Darboux, le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik,* le Recueil *Scientia,* l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* etc.

Certains Traités ou Mémoires renferment parfois des indications de cette nature, plus ou moins complètes. Mais il faut penser à les consulter.

Pour répondre aux vœux que nous émettons ici il faudrait, croyons-nous, pour chaque sujet d'étude, une Notice courte, avec les renseignements bibliographiques indispensables, les indications du sujet à traiter, de son degré de difficulté, et des langues à connaître. Certains journaux, l'*Intermédiaire des Mathématiciens* ou l'*Enseignement mathématique,* publieraient sans doute volontiers une pareille Notice; on pourrait par la suite la compléter chaque fois que la question ferait un pas important.

Au bout d'un certain temps, un Recueil de pareils sujets pourrait être publié par un éditeur.

Pour rendre plus claire notre pensée et la préciser, nous ne croyons pouvoir faire mieux que de prendre un exemple; on nous excusera d'y citer nos Travaux : il est bien évident que ce sont souvent ceux qui ont publié des Mémoires sur une question qui peuvent indiquer un sujet à traiter s'y rapportant.

Dernier théorème de Fermat : $x^m + y^m \neq z^m$.

Fermat a énoncé sans démonstration cette propriété :

« L'équation indéterminée $x^m + y^m = z^m$ est impossible en nombres entiers quand m est entier > 2. »

Ce théorème n'est pas encore complètement démontré. Pour en aborder l'étude, lire :

Serret, *Algèbre supérieure;* Legendre, *Mém. de l'Institut,* 1823; Dirichlet et Dedekind, *Zahlentheorie* et Bachmann, *Theorie der Kreistheilung*; ou, au lieu de ces deux livres, Bachmann, *Zahlentheorie;* Kummer, *J. de Math.,* t. XVI, *J. für Math.,* 1837, 1846, 1847, 1850, et *Abhandlungen der Wiss. zu Berlin,* 1857; Mirimanoff, *J. für Math.;* Hilbert, Maillet, Mém. de l'*Assoc. franç. pour l'avanc. des Sciences,* 1897; *Compt. rend. de l'Acad. des Sc.,* juillet 1899 et *Acta mat.,* 1900.

Il faut pouvoir lire suffisamment l'allemand et le français.

Digitized by Google

On peut se contenter d'essayer de démontrer que $x^{\lambda^t} + y^{\lambda^t} = z^{\lambda^t}$ (λ nombre premier) est impossible en nombres entiers premiers entre eux pour toute valeur de t supérieure à une certaine limite fonction de λ : ce théorème est déjà établi quand x, y, z sont premiers entre eux et à λ. Le sujet est très difficile.

Enfin l'on peut étudier plus généralement les équations $ax^\lambda + by^\lambda = cz^\lambda$ ou d'autres de même forme (1).

---

(1) Des indications de cette nature pour un grand nombre de points de la science mathématique difficiles ou non, et résumant, *en quelques lignes,* l'état de chaque question et les progrès à accomplir, seraient insérées très volontiers par l'*Intermédiaire des Mathématiciens.*

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR LA

LANGUE INTERNATIONALE AUXILIAIRE

DE

M. LE DOCTEUR ZAMENHOF, CONNUE SOUS LE NOM D' « ESPERANTO »,

PAR M. CH. MÉRAY (DIJON).

(Communication présentée par M. C.-A. LAISANT.)

Devant un Congrès de Mathématiciens, il serait puéril d'insister sur la très grande incommodité qu'infligent aux savants, plus encore qu'au commun des hommes civilisés, la diversité des langues et la difficulté de leur acquisition pour les étrangers. Cette situation, que les hommes de science connaissent trop et dont tous ont souffert plus ou moins, a fait naître depuis bien longtemps le besoin de quelque idiome conventionnel, pouvant servir d'interprète commun entre les gens un peu instruits de tous pays, qui ne parlent pas une même langue naturelle. Ce besoin est si ancien, si certain, que dès l'époque où la guerre a cessé d'être l'unique préoccupation des peuples européens dans leurs rapports les uns avec les autres, il a cherché satisfaction et en a trouvé un commencement dans l'emploi du latin. Il est si persistant, que, malgré la difficulté propre du latin, qui est très grande, malgré sa pauvreté devenue excessive relativement aux exigences de la pensée moderne, cette langue, qui pourtant s'était laissée mourir, n'est pas encore tout à fait abandonnée par la littérature scientifique internationale. L'acuité croissante du même besoin, l'insuffisance du latin en même temps, sont surtout démontrées par les 150 langues internationales ayant, d'après les érudits, existé, au moins en projet, pendant le cours des deux derniers siècles, par les langues nouvelles de ce genre qu'à cette heure l'imagination des inventeurs ne se lasse pas encore de nous proposer, par l'histoire assez récente du *Volapuk,* l'une de ces langues artificielles, ayant certes des qualités, qui, avant de succomber sous le poids de graves défauts, a eu un commencement de diffusion et a joui un instant d'une très grande faveur.

Digitized by Google

La langue *Esperanto,* créée par M. le Dr Zamenhof, de Varsovie, et publiée en 1887, fait en ce moment, dans son extension, des progrès de jour en jour plus marqués, et ses adeptes, tant nouveaux qu'anciens, sont unanimes à proclamer qu'enfin elle a apporté la solution, si longtemps désirée et infructueusement poursuivie, à ce problème capital d'une langue internationale auxiliaire. M'étant rangé de tous points à cette opinion, dès mes premiers pas faits dans l'étude extraordinairement facile de cette langue dont un hasard datant de quelques mois m'avait révélé l'existence, étude entreprise, je peux le dire, par simple curiosité et avec beaucoup de scepticisme, puis m'étant aperçu avec la dernière surprise qu'elle était absolument ignorée des savants, j'ai cherché aussitôt à attirer leur attention sur elle. Certains esprits, dominés par une conception irréfléchie et imparfaite du rôle raisonnablement assignable à une langue artificielle auxiliaire, ont accueilli mes suggestions avec une grande défiance qui pourtant n'a pas dit encore son dernier mot. D'autres, subissant peut-être l'impression trop fâcheuse qu'a laissée l'échec retentissant du Volapuk, butés, en tout cas, à l'idée fixe qu'un problème creusé si longtemps sans succès ne pouvait qu'être insoluble, se sont contentés de leur opposer la question préalable, en souriant même quelquefois comme à l'annonce de la découverte du mouvement perpétuel. Mais j'ai eu aussi la satisfaction d'en rencontrer quelques-uns, qui ont bien voulu m'écouter, qui, plus prudents et avisés que les autres, ont tenu, comme je l'avais fait, à jeter les yeux sur l'Esperanto, et qui, après cet examen, n'ont pas hésité plus que moi à le juger capable de rendre très promptement les plus grands services aux sciences, comme à toutes affaires ayant un côté international.

Les points suivants sont ceux sur lesquels il me paraît le plus désirable que l'attention du Congrès s'arrête.

I. La facilité de l'acquisition de l'Esperanto, facilité incomparable et si grande qu'elle ne manque jamais de surprendre et de charmer les nouveaux adeptes, même prévenus par les affirmations les plus optimistes.

II. L'état actuel de la diffusion de l'Esperanto et ses progrès quotidiens; réalisés, pour la plus grande partie, par des recrues ne possédant guère qu'une instruction *moyenne,* ils semblent ne plus attendre qu'une impulsion venant d'un peu haut, pour passer rapidement au point où la langue rendra, dans leur plénitude, les services variés qui sont attendus d'elle.

III. Fausseté des préjugés consistant à croire que toute langue non maternelle est forcément difficile, et surtout, qu'une langue internationale

Digitized by Google

auxiliaire, ne peut fonctionner utilement, à moins d'être devenue universelle et exclusive à moins d'être comprise et parlée même par les classes illettrées de la Société.

IV. Inaptitude du latin à reprendre désormais le rôle de langue internationale auxiliaire, que la force des choses lui a peu à peu arraché.

Je termine en signalant au Congrès l'existence d'appréciations des plus favorables qui ont été formulées sur l'Esperanto par des hommes d'une très haute valeur, parmi lesquels : M. Max Muller, Associé étranger de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres ; M. Ernest Naville, Associé étranger de l'Académie des Sciences morales et politiques ; M. G. Picot, Secrétaire perpétuel de cette dernière Académie ; M. L. Tolstoï, le célèbre écrivain russe, etc.

P.-S. — Depuis la date de ces lignes, l'Esperanto a gagné un terrain presque incroyable, à commencer par une estime sérieuse et toujours grandissante dans les milieux à haute culture intellectuelle, où naguère son nom même était inconnu. Les faits suivants, qui sont *matériels,* suffisent à en marquer l'étendue : en juin dernier, les éditions primitives des Manuels de la langue, jusque-là d'un écoulement fort calme, ont été tout à coup épuisées par l'enlèvement de 1500 séries demandées en moins de trois mois ; à la hâte on écrit, la maison Hachette et Cie cette fois imprime une nouvelle série bien meilleure, et ses deux derniers numéros étaient encore sous presse que le tirage du premier était de nouveau épuisé.

Digitized by Google

Digitized by Google

LES

POSTULATS DE LA GÉOMÉTRIE

DANS L'ENSEIGNEMENT,

PAR G. VERONESE (PADOUE).

(Traduction de MM. R. BRICARD et E. DUPORCQ.)

Les recherches sur les principes de la Géométrie ont, dans le cours de ce siècle, enrichi la Science de nouveaux résultats importants, de méthodes générales et fécondes, et ont de plus ouvert aux philosophes de nouvelles voies d'investigations sur la théorie de la connaissance des concepts fondamentaux des Mathématiques; doivent-ils rester sans influence sur l'enseignement de la Géométrie rationnelle élémentaire, lorsque le but même de cet enseignement est de contribuer à préparer l'esprit aux études supérieures, en l'habituant au raisonnement rigoureux?

Depuis que ces recherches ont mis en évidence les défauts du texte d'Euclide, qui avait servi durant plusieurs siècles à l'éducation mathématique de la jeunesse, si l'on veut faire un Ouvrage sérieux, témoignant de quelque progrès, ne doit-on pas se préoccuper de la nature, du rôle des postulats, de leurs relations intimes et des liens qui unissent les diverses théories et les méthodes variées que ces recherches ont fait éclore? Pourtant, si Euclide fut lui-même un grand géomètre, n'est-ce pas précisément parce que l'ouvrage qu'il composa répondait aux vues de son époque? Et la fortune qui accueillit en France et ailleurs les *Éléments* de Legendre, peut-être fut-elle due surtout à la nouveauté des méthodes et des idées qu'ils contiennent. Quant à ceux qui affirment aujourd'hui que, pour écrire un nouveau traité, on n'a pas à se préoccuper d'études critiques sur les principes de la Géométrie, ils devraient prouver que l'enseignement élémentaire est parvenu à son plus haut degré de perfection. D'ailleurs, même sans avoir la patience ou l'audace de composer un nouveau traité, le professeur qui voudra néanmoins en choisir un bon à

Digitized by Google

l'usage de ses élèves, comment pourra-t-il convenablement guider son choix, s'il ne s'intéresse pas lui-même à ces questions? Toutes les discussions auxquelles a donné lieu le texte d'Euclide démontrent clairement que le problème didactique dépend du problème scientifique relatif aux postulats. Nous parlons, bien entendu, du problème didactique qui se pose dans l'enseignement classique, dont l'objectif est le même dans tous les pays civilisés, et qui s'occupe partout des mêmes sujets, à part quelques variations, d'une nation à l'autre, portant sur la quantité des matières, mais non sur la qualité. Quant aux écoles spéciales, qui préparent aux hautes études techniques, les Mathématiques doivent, plus encore que dans l'enseignement classique (où les études littéraires sont plus développées), y contribuer à la formation de l'esprit et au culte du vrai. Concilier les exigences de la Science, celles de l'enseignement, et aussi celles de l'intelligence moyenne des élèves, tel est donc, selon nous, le but que doit se proposer l'auteur d'un nouveau traité de Géométrie élémentaire. Il est nécessaire, enfin, que les professeurs aient foi dans le progrès de la Science, et qu'ils se débarrassent de préjugés : car, dans toutes les parties des Mathématiques, il n'en est pas où les préjugés soient plus solidement enracinés que dans celle des principes, où il est si facile de travestir les pensées des autres, que ce soit à cause de l'obscurité où sont inconsciemment tombés quelques auteurs illustres, ou encore par suite d'une critique peu attentive et peu consciencieuse. Et il en est surtout ainsi dans l'enseignement, par suite de l'habitude que prennent certains professeurs d'enseigner aveuglément les Mathématiques à l'aide d'une méthode donnée, ce qui les met dans l'impossibilité de se renouveler et les pousse à mépriser le nouveau.

Comment donc concilier les exigences de la Science et de l'enseignement? Il sera tout d'abord avantageux de rechercher à quel point on y est parvenu jusqu'ici, cette recherche restant mieux déterminée et plus simple. Ce fut Legendre qui, le premier depuis Euclide, tenta dans ses *Éléments* une réforme de l'enseignement de la Géométrie, et ces *Éléments*, qui datent de l'époque de la Révolution française, furent longtemps comme le nouveau code de la Géométrie élémentaire, même en Italie; aujourd'hui encore, leur influence est manifeste sur les traités français modernes dont j'ai connaissance, et dont quelques-uns encore sont adoptés en Italie dans les écoles techniques. Mais, malgré tout, on ne peut dire que Legendre ait évité les défauts du texte d'Euclide, et même, comme l'observe Houel, qui, en France, étudia passionnément les principes de la Géométrie, et dont l'opinion sur ce sujet fait autorité,

Digitized by Google

Legendre altéra la beauté de la méthode grecque par l'introduction de procédés arithmétiques. C'est pour éviter cet inconvénient qu'en Italie les illustres mathématiciens Betti et Brioschi firent une traduction des *Éléments* d'Euclide et que le texte euclidien fut officiellement prescrit dans l'enseignement classique; on n'avait pas d'ailleurs principalement en vue l'adoption de ce texte, mais on désirait surtout l'introduction de la méthode qui respecte la rigueur scientifique, et qui, jusqu'à la théorie de la mesure, exclut du raisonnement géométrique tout soutien arithmétique ou algébrique; et ce fut sage, même si le texte d'Euclide ne répondait plus aux exigences de la Science et de l'enseignement modernes. Il ne me semble d'ailleurs pas que les autres traités, où sont suivies les méthodes d'Euclide, ou celles de Legendre, ou d'autres encore, soient parvenus à cette conciliation entre la Science et l'enseignement que désireraient tant de professeurs, et qu'il est possible d'atteindre.

Dans la préface de mes *Fondements* (1), je distingue les sciences mathématiques en sciences formelles et en sciences expérimentales. Les premières comprennent l'Arithmétique et les Mathématiques pures en général, car, par exemple, dans sa formation primitive, l'idée de nombre provient de la faculté de compter des objets, qui peuvent être purement abstraits; ces sciences envisagent des êtres qu'il n'est pas nécessaire, pour pouvoir les déterminer mathématiquement, de représenter en dehors de la pensée par des objets qui en seraient les images (bien entendu, en dehors de toute opinion philosophique sur l'origine des idées mathématiques abstraites). La logique pure est, elle aussi, une science formelle. Au contraire, les sciences qui s'occupent d'objets qui existent en réalité, en dehors de la pensée, ou d'objets abstraits analogues pouvant se représenter en dehors de la pensée, sont des sciences expérimentales. Tandis que, dans les sciences formelles, la vérité résulte de l'accord avec diverses conceptions primitives, toutes reconnues comme vraies, dans les sciences expérimentales, elle provient de l'accord entre l'observation et la pensée, de sorte que ces sciences sont basées sur quelques vérités primitives dont l'intuition accompagne la perception de certains faits, mais qui ne peuvent se déduire les unes des autres. Ces vérités primitives sont les *axiomes* proprement dits. Par exemple, la proposition suivante : « la droite, dans le champ de notre observation extérieure, est déterminée par deux quelconques de ses points » est un axiome, lorsqu'elle n'est pas réductible aux prémisses. Il y a encore en Géométrie d'autres

(1) Traduction en allemand de A. SCHEPP. Leipzig, Teubner, 1894.

Digitized by Google

axiomes, qui résultent aussi de l'observation directe des objets extérieurs, dans le champ limité de notre observation, mais que nous étendons ensuite aux objets, hors de notre portée effective, qui se trouvent en dehors de ce champ : c'est ce qui arrive pour l'axiome cité tout à l'heure et relatif à la droite, lorsque nous l'étendons à une droite illimitée, c'est-à-dire à tout l'espace, qne nous ne pourrions observer. Il y a enfin d'autres axiomes qui ne se rapportent plus qu'aux objets extérieurs au champ géométrique correspondant à celui de notre observation : par exemple, ceux qui concernent le point déterminé par une répartition de Dedekind, le point qui sert à la construction de l'espace à quatre dimensions, etc. : ces axiomes n'ont plus alors qu'une existence abstraite. Aussi est-il nécessaire, pour les axiomes des deux dernières espèces, de prouver leur compatibilité avec les axiomes proprement dits qui dérivent de l'observation directe. Les axiomes des deux dernières catégories sont plus proprement des postulats ou des hypothèses. Il est clair qu'au nombre des axiomes d'une science expérimentale il est inutile de placer les principes qui appartiennent à la logique pure et sont la base de tout raisonnement, comme, par exemple, le principe de contradiction. Donc, en résumé : *les axiomes et les postulats ou hypothèses géométriques sont des propositions indémontrables ; les unes dérivent d'une manière évidente de l'observation directe, les autres ne sont en contradiction ni avec les précédentes, ni entre elles.*

Les sciences formelles sont des sciences exactes. Nous considérons aussi la Géométrie et la Mécanique rationnelle comme des sciences exactes, parce qu'aux objets concrets qui ont servi à déterminer les axiomes proprement dits, notre esprit substitue des formes abstraites, pour lesquels la vérité se démontre au moyen des axiomes, indépendamment de leur signification effective. Ce n'est donc pas sans raison que la Géométrie et la Mécanique rationnelle sont considérées comme des mathématiques pures. Il va de soi qu'une science est d'autant plus simple et exacte que les axiomes sont plus simples et moins nombreux. On pénètre de suite dans le domaine de l'observation, lorsqu'on cherche à établir empiriquement la vérité, en opérant sur les objets primitifs, quand la réalité extérieure le permet, d'une manière analogue à celle qu'on emploie pour opérer sur les formes abstraites auxquelles ces objets ont donné naissance. Par exemple, dans le plan euclidien, deux droites quelconques non parallèles se rencontrent en un point; mais, dans le champ de l'observation extérieure, il existe aussi sur un plan des droites non parallèles, mais qui, même prolongées en restant dans ce champ, ne

Digitized by Google

se rencontrent pas. Mais si certaines opérations sont possibles dans ce champ de l'observation, avec certains objets, l'impossibilité pratique d'en faire d'autres avec d'autres objets, dans le même champ ou en dehors de lui, n'infirme en rien la vérité acquise dans un domaine abstrait plus étendu. Au contraire, je distingue nettement au point de vue scientifique la Géométrie de ses applications pratiques, et je trouve des axiomes qui ne sont pas nécessaires au développement logique de la Géométrie, mais le sont à ses applications pratiques : par exemple, qu'un corps peut se mouvoir sans déformation, ou que l'espace physique est à trois dimensions.

Dans un traité de Géométrie élémentaire, les postulats devront, autant que possible, satisfaire aux conditions précédemment énoncées, mais il est certain qu'ils ne pourront satisfaire à toutes au même degré. Par exemple, dans les recherches scientifiques, il conviendra de disséquer avec soin les postulats, pour montrer l'indépendance de leurs diverses parties; mais une telle méthode serait antididactique : car, dans l'enseignement, il est nécessaire d'attirer l'attention des élèves sur les propositions principales, afin qu'ils en conservent une impression forte et durable. Et c'est non seulement vrai pour les postulats, mais aussi pour les définitions et pour les théorèmes. Utile aux recherches scientifiques, la critique doit être exclue de l'enseignement, car elle amènerait de la confusion dans l'esprit des élèves, bien qu'il soit nécessaire qu'elle ait occupé l'auteur même d'un traité ou le maître qui en choisit un pour son enseignement. Aussi ne peut-on donner les postulats en ne les appliquant d'abord qu'à un champ correspondant à celui de notre observation, et en démontrant ensuite qu'on peut les admettre pour tout l'espace : ce serait, dès l'origine, introduire trop de distinctions à faire. Par exemple, dans le plan, il faudrait distinguer de suite les droites qui se coupent, celles qui ne se coupent pas, mais ne sont pas parallèles, et enfin les droites parallèles. Mais, d'un autre côté, il faut que le professeur puisse dire qu'en admettant les postulats pour une étendue limitée de l'espace, on peut les admettre ou les démontrer pour tout l'espace. Et, dès lors, on voit de suite que le postulat d'Euclide relatif aux parallèles, et basé sur la définition commune des parallèles, comme étant deux droites du plan qui, prolongées indéfiniment, ne se rencontrent pas, n'est pas une proposition déduite de l'observation directe, puisque personne n'a jamais vu deux telles droites.

J'ai dit que, scientifiquement, les postulats doivent être compatibles et indépendants. La condition de compatibilité, c'est-à-dire de non

Digitized by Google

contradiction, est encore nécessaire dans l'enseignement, bien qu'on ne puisse la démontrer par un raisonnement didactique, pour les postulats qui ne dérivent pas de l'observation directe. L'indépendance des postulats simples n'est pas seulement une question d'*élégance,* mais aussi de *précision.* En supposant qu'un axiome (ou un groupe d'axiomes), A, suffise à définir une figure, si l'on se donnait en outre comme propriété de cette figure un autre axiome B dépendant de A, on croirait que cela signifie qu'il y a diverses sortes de figures satisfaisant aux conditions A, et que c'est pour distinguer une de ces figures qu'on a eu recours à l'autre condition B, ce qui serait absurde : ce défaut serait par exemple manifeste dans une définition telle que celle-ci : un triangle isoscèle est un triangle tel que deux côtés soient égaux ainsi que les angles opposés à ces côtés. On le retrouve encore, ainsi que l'a observé Gauss lui-même, dans l'axiome qui sert communément à définir le plan, et qui est le suivant : une droite qui a deux points communs avec un plan y est située tout entière ; en effet le plan peut être construit, dans le système euclidien, en joignant un point aux divers points d'une droite, et en menant par le point la parallèle à cette droite, ou bien au moyen d'un triangle et d'un point intérieur ; les propriétés du plan devront toutes dériver des éléments de sa construction, et, par suite, des postulats qui déterminent ces éléments. Malheureusement, l'indépendance des axiomes est difficile à obtenir, même scientifiquement, car ils doivent être décomposés en leurs parties simples. Par exemple, le postulat, d'après lequel la droite est déterminée dans le système euclidien par deux quelconques de ses points, contient autant de postulats qu'il existe de couples de points sur la droite. J'ai, en effet, démontré dans mes *Fondements* que, au moyen de postulats convenables, si l'on admet le postulat précédent pour un couple et pour les couples égaux, ce postulat se démontre pour tous les autres couples dans les systèmes d'Euclide et de Lobatschewsky, tandis que dans le système de Riemann (sphérique), il se présente encore des couples qui ne déterminent pas la droite. On voit donc que l'indépendance des postulats, au véritable sens du mot, est encore un but idéal, dont on ne cessera de se rapprocher, mais que personne encore n'a pu atteindre. H. Grassmann disait, non sans raison, que la Science se développe dans deux sens, l'élévation et la profondeur, également illimitées et obscures. Mais, alors même qu'il arrive qu'au point de vue scientifique les postulats d'un système donné ne sont pas toujours tous indépendants, on est encore souvent obligé dans l'enseignement d'y adjoindre d'autres postulats, dépendant des premiers, pour

Digitized by Google

éviter de trop morceler les propositions fondamentales et ne pas augmenter considérablement les matières, et pour ne pas être astreint à des démonstrations qui, bien qu'élémentaires, n'en sont pas moins trop compliquées pour des études scolaires. Mais si ces raisons forcent à introduire ainsi, dans l'enseignement de la Géométrie rationnelle, plus de postulats qu'il ne serait nécessaire, l'auteur, comme le professeur, fera bien de signaler que si ces propositions sont données sans démonstration, c'est pour abréger l'exposé, mais qu'elles n'ont pas le caractère de postulats véritables. Aussi ne pourrons-nous jamais approuver les auteurs qui, en croyant éviter toute difficulté, définissent l'axiome comme une proposition évidente par elle-même. Alors il n'y aurait pas de raison pour s'arrêter à moitié route, bien que, malgré cette définition de l'axiome, les traités en question démontrent par exemple qu'un segment rectiligne est plus court que toute ligne brisée ayant les mêmes extrémités, et beaucoup d'autres propositions évidentes. Il n'y aurait plus alors de possible, didactiquement, qu'un système unique de postulats, constitué par toutes les propositions évidentes de la Géométrie élémentaire. Mais ce qui serait pire que tout, c'est qu'on ne pourrait plus se fier aux définitions, car, en considérant les propositions exprimées par les axiomes comme des résultats évidents par intuition, ou comme des conséquences de l'observation, il n'en résulterait pas qu'elles puissent s'appliquer à *tout* l'espace.

Il ne faut d'ailleurs pas croire qu'il ne puisse être parfois utile de faire abstraction de quelques postulats, même au point de vue didactique. En effet, on aura quelquefois avantage à faire usage de certaines analogies entre diverses figures, comme par exemple entre la droite, le faisceau de rayons, la circonférence, le faisceau de plans, etc. : la droite et la circonférence, dans le système euclidien, diffèrent en ce que l'une est une ligne ouverte et l'autre une ligne fermée, mais les autres propriétés de ces deux lignes, considérées en elles-mêmes, sont identiques. De même, le faisceau de rayons et la circonférence diffèrent seulement en ce que l'élément du faisceau est le rayon, et l'élément de la circonférence, le point. Supposons donc donnés pour la droite des postulats A, B, C, D, d'où l'on peut déduire les propriétés E, F, G, etc.; si les propositions A, B, C, D subsistent pour la circonférence, nous pourrons énoncer aussi, sans autre démonstration, les propositions E, F, G, etc., appliquées à la circonférence, moyennant le changement de quelques termes, comme par exemple, segment et arc. Mais si nous avions admis aussi la proposition E comme un postulat relatif à la droite, il aurait fallu la démontrer pour la circon-

Digitized by Google

férence, pour le faisceau de rayons et pour le faisceau de plans, et il aurait fallu trois démonstrations au lieu d'une.

Mais ce qui importe avant tout dans l'enseignement élémentaire, c'est l'exactitude du raisonnement; aussi faut-il que tous les postulats dont on a besoin soient énoncés explicitement, et qu'on ne se serve jamais dans les démonstrations d'autres propositions non admises. Et, bien que Euclide et Legendre aient énoncé explicitement les axiomes (exemple que tous les Traités devraient suivre), il n'est pas difficile de citer des propositions pour la démonstration desquelles ils ont employé tacitement d'autres axiomes. Euclide, par exemple, dans la proposition I du Livre I, s'appuie, pour construire le triangle équilatéral, connaissant son côté, sur des théorèmes relatifs à l'intersection de deux cercles, qui sont traités bien après. De même, sans avoir admis d'abord le postulat que la droite est une ligne ouverte, ou le postulat des parallèles, on démontre parfois la propriété de l'angle externe d'un triangle d'être supérieur à chacun des angles internes opposés ; or cette démonstration ne devient exacte qu'en y introduisant tacitement un autre axiome, qui n'est nullement évident.

La nécessité d'exprimer ainsi tous les postulats explicitement est d'ailleurs comprise dans une condition plus générale. Pour être véritablement exact, et non approximatif comme il le serait dans un enseignement intuitif de la Géométrie, le raisonnement doit être logiquement exact, comme en Arithmétique : que faut-il entendre par là? Cela signifie que l'on devra faire abstraction de la signification géométrique des êtres sur lesquels on raisonne, c'est-à-dire abstraction de l'intuition de l'espace, pour se borner à un raisonnement logiquement exact. Et ainsi, par suite du but même de l'enseignement de la Géométrie, on devra obéir à ce principe que, *étant donné le système des vérités géométriques, si l'on y fait abstraction de l'intuition de l'espace, il devra subsister un système de vérités bien déterminées logiquement, comme en Arithmétique.* Il est facile de faire cette abstraction en remplaçant les éléments par d'autres, par exemple, les droites par des systèmes linéaires, déterminés par deux éléments, en choisissant le système linéaire de sorte qu'il n'ait plus le sens intuitif qu'on attache à une ligne, mais en prenant par exemple une succession d'objets tels que des nombres.

Quand on discute l'exactitude d'une proposition ou d'un raisonnement, on fait précisément plus ou moins usage de ce principe. Voyez néanmoins comment les Traités de Géométrie élémentaire observent peu cette condition essentielle. Euclide même, qui certainement a cherché à être aussi rigoureux qu'il était possible à son époque, introduit dès le

Digitized by Google

début dans les raisonnements des expressions telles que *longueur, largeur, profondeur, ligne, surface, corps,* etc., comme si l'on savait déjà ce qu'elles signifient géométriquement, bien que certaines d'entre elles, telles que l'expression *surface,* soient adoptées parfois avec des sens divers. Ainsi, on définit grossièrement la *figure* comme un ensemble de surfaces, de lignes et de points. Avec de telles définitions, dès qu'on fait abstraction de l'intuition, il ne reste plus rien de déterminé. Ainsi, on dit tout à coup que l'espace est continu et homogène, sans qu'on sache ce que c'est que la continuité et l'homogénéité; on dit que la droite est une ligne divisée par un de ses points en deux parties, mais on ignore ce que c'est qu'une *ligne* et ce que c'est qu'une *partie.* D'ailleurs, si la notion de la surface dérive par intuition de celle du corps, si la ligne résulte de la surface, la droite illimitée n'est pas une ligne, puisque nous n'avons jamais observé de corps illimité; et, en outre, ce qui divise en deux parties une surface n'est pas toujours une ligne; c'est, par exemple, le cas du sommet pour un cône. On dit encore que le plan est une surface telle que toute droite qui a sur elle deux points y est située tout entière. On peut répéter à ce sujet l'observation faite précédemment à propos de la droite : c'est qu'un plan illimité n'est la limite d'aucun corps. D'ailleurs, en faisant abstraction de l'intuition, et en supposant que la droite soit bien déterminée, sans qu'on ait bien défini le mot *surface,* la propriété, que toute droite ayant deux points communs avec un plan y est située tout entière, ne suffit pas à définir le plan, car cette propriété convient aussi à l'espace ordinaire et, en général, à tout espace linéaire. Les propositions énoncées pour le plan ainsi défini ne sont pas exactes sans que l'élève ajoute de lui-même à cette définition quelque chose qui n'y figure pas. Mais, dans ces conditions, on ne lui apprend pas à raisonner exactement.... Aussi n'y a-t-il pas à s'étonner que quelques élèves, qui deviennent ensuite des philosophes, combattent les nouveaux concepts mathématiques dans le domaine des principes, comme c'est arrivé par exemple pour la Géométrie non euclidienne ou pour celle à plus de trois dimensions. Comme excuse, on dit qu'on ne peut définir aucune notion telle, par exemple, que celle d'espace. Mais il faut distinguer. On ne peut définir le continu intuitif, mais on peut définir le continu géométrique comme un groupe de points qui satisfont à certaines propriétés, géométriquement suffisantes. Ainsi, on ne peut définir l'espace intuitif, qui est en nous une représentation de l'espace physique, abstraction faite de certaines de ses propriétés, mais nous pouvons définir l'espace géométrique en déduisant de sa construction toutes ses propriétés géométriques, comme on peut le faire pour le

Digitized by Google

plan. On peut faire une observation analogue pour le postulat du mouvement sans déformation qui sert communément à établir l'égalité des figures, et qui mérite une mention spéciale. On dit, ou l'on suppose tacitement, comme le fait Euclide, qu'une figure peut se mouvoir sans *déformation*, ou, en d'autres termes, que les relations mutuelles entre ses éléments ne sont pas modifiées. Dans mes *Fondements* j'ai démontré que la Géométrie théorique peut se développer indépendamment de tout concept physique et mécanique, et, si Newton et Helmholtz ont considéré la Géométrie comme une partie de la Mécanique, c'est parce qu'ils ne distinguaient pas la Géométrie rationnelle de ses applications pratiques. Or, le postulat en question est précisément un de ceux qu'il est nécessaire d'admettre comme un *moyen* de construire pratiquement les figures, mais qui n'est pas nécessaire pour la construction géométrique abstraite de ces figures. Si l'on se conforme au principe énoncé plus haut et auquel doit satisfaire le système des vérités géométriques, une fois qu'on fait abstraction de l'intuition du mouvement, que reste-t-il de ce postulat placé à la base de la Géométrie? Il signifie qu'il existe dans l'espace des systèmes continus de figures égales à une figure donnée (qui se déplace), sans qu'on ait défini ni les systèmes continus de figures, ni les figures égales. Quand on emploie ensuite ce postulat pour définir l'égalité des figures, on voit qu'une telle définition renferme logiquement une pétition de principe. D'ailleurs ce postulat comprend des conditions compliquées, telle que celle des systèmes continus, qui ne sont nullement nécessaires pour définir l'égalité des figures. Euclide et Legendre, bien qu'ils aient tacitement fait usage de ce postulat pour démontrer l'égalité de deux figures, n'ont cependant pas défini les figures égales comme des figures superposables, ainsi qu'on fait ordinairement actuellement, en excluant ainsi les figures symétriques. Ce fut Legendre qui distingua le premier l'égalité par symétrie et l'égalité par congruence, ce qui est juste, puisque les relations mutuelles des éléments qui constituent deux figures symétriques restent aussi les mêmes. D'ailleurs le criterium de la superposition n'est pas le seul à donner celui de l'égalité, parce que, dans l'égalité par superposition, c'est-à-dire la congruence, il entre un autre concept, à savoir l'égalité de sens des figures dans l'espace qui les contient, concept tout à fait étranger à la constitution des figures prises en elles-mêmes. C'est pourquoi deux figures symétriques, c'est-à-dire égales et de sens opposé, ne sont pas superposables dans le plan, mais le sont dans l'espace ordinaire, comme deux trièdres opposés par le sommet sont superposables dans l'espace à quatre dimensions, qui a,

Digitized by Google

géométriquement, le même droit à l'existence que l'espace ordinaire. Il faut donc établir l'égalité des figures indépendamment du mouvement sans déformation, introduire à son temps le concept de sens des figures dans le plan et dans l'espace, puis définir l'égalité par congruence (figures de même sens) et par symétrie (figures de sens opposés), et alors le principe de mobilité sans déformation d'une figure dont certains points peuvent rester fixés, trouvera son explication géométrique, et l'on pourra en déduire les propriétés fondamentales; par exemple, de cette propriété que deux segments congruents d'une droite ne peuvent avoir un seul point commun, on déduira qu'un segment ne peut se mouvoir sur la droite en ayant un de ses points fixe. Une fois arrivé à ce point, dans l'exposé de la Géométrie, on pourra se servir théoriquement du principe de déplacement pour démontrer l'égalité, ou mieux, la congruence de deux figures, puisque ce principe correspondra alors à des concepts et à des propriétés géométriques bien établies.

Mais, en soutenant que le système des vérités géométriques doit être bien déterminé, je n'ai jamais eu l'intention d'exclure l'intuition spatiale, ni d'en diminuer le secours, surtout dans l'enseignement. Ce n'est pas à moi, qui ai fait largement usage de cette intuition, même où toute voie peut lui sembler barrée, comme dans la Géométrie à plusieurs dimensions, qu'on pourrait adresser une pareille objection. Il est certain que l'intuition est nécessaire à la Géométrie, que les axiomes doivent être simples et intuitifs, et que, dans les recherches purement scientifiques, on doit préférer les méthodes basées sur l'intuition spatiale. L'enseignement de la Géométrie rationnelle doit être précédé, à l'école secondaire inférieure, par un enseignement rudimentaire intuitif, afin que l'écolier se familiarise avec les figures les plus communes, dont il devra plus tard étudier les propriétés à l'aide du raisonnement. Et, même dans l'enseignement rationnel de la Géométrie, toutes les propositions et tous les raisonnements doivent être précédés et accompagnés par l'intuition de l'espace au moyen de l'observation de figures tracées sur le Tableau, ou de modèles, destinés à développer l'imagination géométrique, afin que le raisonnement apparaisse à l'écolier plutôt comme une conséquence de la vision des figures que comme le résultat d'une logique aride et abstraite. Aussi doit-on, dans le texte et plus encore dans la leçon destinée à l'enseignement scolaire, avoir recours à des observations et à des exemples pratiques, où l'on emploiera tous les concepts intuitifs acquis par l'élève, de sorte que les idées de mouvement, d'espace, de corps, de surface, de ligne servent à expliquer et à consolider les postulats, ou à éclaircir les définitions,

Digitized by Google

mais sans pourtant (et c'est là l'essentiel) que ni les postulats ni les définitions ne soient basés sur des concepts indéterminés logiquement, et sans que, dans le raisonnement proprement dit, on fasse usage de concepts non contenus dans les postulats ou dans les propositions dont on part. Par exemple, on peut éveiller l'idée du point comme celle de limite de la ligne, la ligne étant la limite de la surface, et celle-ci la limite du corps, mais dans le postulat: *il existe des points distincts*, il n'est plus question de ces concepts de corps, de surface et de ligne : en faisant abstraction de l'intuition, on a la proposition : il existe des éléments distincts. De même, pour le postulat d'après lequel il existe sur la droite des segments égaux et des segments inégaux, on peut faire usage, dans une observation pratique, du transport des objets, mais, dans le postulat lui-même, l'égalité des segments doit être établie indépendamment de ce moyen pratique. De même encore, on peut, pour la commodité du langage, employer certains termes empruntés à l'idée de mouvement, mais sous la condition d'en spécifier le sens géométrique.

Recherchons maintenant quels sont les modes d'exposition les plus convenables à l'enseignement de la Géométrie élémentaire. Même en restant au point de vue scientifique, la meilleure méthode est encore la méthode géométrique, parce qu'elle dérive du processus constitutif de l'intuition de l'espace. Puisque cette intuition est une condition primordiale et essentielle de la Géométrie, à laquelle elle fournit les premiers objets géométriques et leurs propriétés indémontrables, la meilleure méthode est celle qui, partant de ces premières propriétés, étudie directement les divers éléments des figures de sorte qu'on puisse suivre pas à pas le raisonnement en recourant à l'intuition spatiale. La simplicité et l'élégance de la Géométrie dérivent de la facilité de ses constructions. Et c'est là la méthode d'Euclide. Une méthode qui supposerait connue indirectement une partie des propriétés géométriques, ou qui s'appuierait sur une notation dont l'établissement admettrait implicitement autant de postulats, serait une méthode artificielle et indirecte, qui pourra servir à vérifier l'exactitude d'un système de postulats, à trouver de nouvelles relations entre les vérités fondamentales de la Géométrie, ou à ouvrir de nouveaux horizons à la Science, mais elle ne pourrait être utilisée à résoudre d'une manière plus satisfaisante les questions de principes, surtout si l'on a en vue le problème didactique. Lie, dans les applications qu'il a faites de ses études célèbres sur les groupes de transformations à des recherches sur les principes de la Géométrie, conclut que « Die Geometrie soll in ihrem verschiedenen Stufen soweil möglich rein geometrisch

Digitized by Google

begründet werden, dass ist eine Forderung die gewiss jeder unterschreiben wird. » On peut en conclure que l'habileté de Legendre, qui mêle les méthodes algébriques et géométriques, n'est pas recommandable didactiquement. Dans plusieurs Traités, qui ne sont généralement pas italiens, j'ai vu la facilité avec laquelle, dès le début, on considère les figures comme des quantités, en leur appliquant, sans autre explication, les propriétés des quantités arithmétiques; mais, quand on veut bien établir la théorie des grandeurs géométriques, il faut démontrer que cela est possible. De même lorsqu'on veut diviser le volume d'un solide en deux parties égales, il faut d'abord introduire les notions géométriques qui permettent d'aboutir à cette conclusion, en définissant complètement ce qu'on doit entendre ainsi par parties égales, attendu qu'en Géométrie on considère diverses sortes d'égalités. La méthode arithmétique ou algébrique ne peut donc être appliquée que quand la Géométrie est déjà suffisamment développée pour qu'on puisse montrer la possibilité de cette application, et c'est là l'objet de la théorie de la mesure.

En fixant les conditions auxquelles doivent satisfaire les postulats géométriques, et en recherchant la méthode d'exposition la plus convenable à l'enseignement, nous n'avons pas exclu la possibilité de divers systèmes de postulats. Je pense d'ailleurs que les matières de la Géométrie élémentaire d'Euclide sont encore les plus propres à l'enseignement secondaire, parce qu'elles sont la base de tout enseignement géométrique, correspondent le mieux aux besoins ordinaires de la vie et contribuent admirablement au développement des facultés logiques et intuitives de l'esprit, ce qui est le but principal de l'enseignement des Mathématiques dans les écoles qui préparent aux études supérieures. On ne trouverait par exemple pas ces qualités dans les matières de la Géométrie projective proprement dite. Il est certain, comme l'observe Chasles, que la Géométrie ancienne n'a pas les méthodes générales de la Géométrie moderne, que divers cas d'un même théorème ou d'un même problème sont traités à part comme autant de théorèmes ou de problèmes sans aucune relation, et que l'unité de certaines théories y est trop morcelée. Mais il n'en est pas moins vrai qu'il y a dans la Géométrie élémentaire des théories basées sur divers concepts fondamentaux, telles que la théorie de l'égalité, les relations métriques entre les éléments d'une figure, la théorie de la similitude, de la mesure, etc. La Géométrie élémentaire euclidienne est de nature essentiellement *métrique*; on s'y sert moins des propriétés de position que de celles d'égalité et d'inégalité, telles que les relations entre les segments, les angles, les propositions sur les triangles, etc.,

Digitized by Google

qui sont toutes de nature métrique. La méthode projective de Cayley-Klein, qui a été développée géométriquement et élémentairement par M. Pasch dans son beau Livre : *Ueber die neuere Geometrie*, et sur laquelle ont été publiés des travaux importants de MM. Peano, Schur, Enriques, Pieri, et autres, est certainement la meilleure méthode de la Géométrie projective.

Cette méthode, fondée sur des propriétés *optiques,* suivant le mot de M. Klein, permet, grâce à des conventions appropriées, d'établir les principes de la Géométrie métrique, et par suite de la Géométrie élémentaire commune. Mais, selon moi, il importe moins d'augmenter la quantité des matières que de les disposer en meilleur ordre, en évitant autant que possible le manque de rigueur, et en recourant aux méthodes modernes pour donner plus d'unité aux diverses parties de l'enseignement.

Reste par conséquent la méthode euclidienne, qui s'appuie sur les propriétés *mécaniques,* ou, plus exactement, sur les propriétés d'égalité et d'inégalité.

C'est ici que se pose la question suivante : convient-il d'énoncer au début les postulats qui concernent l'espace, ou bien ceux qui concernent la droite, pour passer ensuite au plan et enfin à l'espace? Les postulats de l'espace sont naturellement plus complexes que ceux de la droite; mais les partisans de la première méthode, qui veulent fondre la Géométrie de l'espace et la Géométrie plane, donnent pour raison que cette dernière trouve de précieux avantages à une semblable union. Je ne suis pas de cet avis: la Géométrie élémentaire présente, avant tout, un caractère *métrique,* comme je l'ai rappelé plus haut, et les propriétés d'un espace qui dérivent simplement des propriétés d'un espace supérieur sont en général des *propriétés projectives.* La méthode en question peut trouver quelques applications heureuses en Géométrie élémentaire, mais cet avantage ne compense pas l'inconvénient didactique d'exposer simultanément les principes de la Géométrie plane et ceux de la Géométrie de l'espace.

Il convient en effet, dans l'enseignement, d'aller du particulier au général, du simple au composé. Euclide, Legendre et la majeure partie des auteurs modernes exposent entièrement la Planimétrie avant d'aborder la Stéréométrie. Je pense qu'il faut commencer par la *Rectimétrie*, du moins en ce qui concerne les principes. Ces derniers étant bien établis, les théories spéciales telles que celles de l'équivalence, de la similitude, de la mesure, etc., pourront être traitées simultanément dans le plan et dans l'espace. Je ne veux pas dire, avec les *fusionistes,* que les figures à

Digitized by Google

trois dimensions dans ces théories doivent intervenir dans la démonstration de théorèmes planimétriques, mais bien que de nombreuses démonstrations peuvent être étendues simplement du plan à l'espace. Un tel mode d'exposition économisera du temps et fera mieux saisir aux élèves les relations qui existent entre les diverses parties d'une même théorie.

Pour donner plus d'unité aux diverses théories, on se trouvera bien d'appliquer un principe moderne, dont j'ai signalé, dans mes *Éléments,* l'utilité didactique. Soient une figure A à laquelle se rapportent les postulats a, b, c, d, ..., et une figure B, pour laquelle on peut énoncer les mêmes postulats, *moyennant le changement de certaines expressions de langage.* Toutes les propriétés de la figure A qui se déduisent de a, b, c, d, seront exactes pour la figure B, *si l'on apporte dans le discours les modifications dont il s'agit.* Il en sera de même pour les démonstrations de ces propriétés (1). J'ai appliqué ce principe à l'étude de la ligne droite, du cercle, du faisceau de rayons et du faisceau de plans; ainsi les propositions a, b, c, d, ..., postulées ou démontrées pour le plan, sont valables (sauf l'axiome des parallèles), pour la gerbe de rayons, moyennant le changement de certains mots dans les énoncés : celle des propriétés du triangle, par exemple, qui sont indépendantes de l'axiome des parallèles, font connaître des propriétés des trièdres. Le professeur sera ainsi conduit à faire remarquer, à la fin de son cours, que la différence essentielle entre la Géométrie de la gerbe et la Géométrie plane tient à la présence, dans cette dernière, du postulat d'Euclide.

Il est bon aussi de mettre à profit les analogies que présentent diverses théories, par exemple celle des figures égales et celle des figures semblables : les définitions de ces deux espèces de figures se ramènent l'une à l'autre, en faisant se correspondre les expressions *segments égaux* et *segments proportionnels.* La même remarque s'applique aux raisonnements faits sur ces figures. Remarquons d'ailleurs que les modifications ne doivent pas être apportées pour l'amour de la nouveauté, mais seulement quand elles sont nécessaires ou du moins vraiment utiles.

C'est dans cet esprit qu'ont été écrits mes *Éléments* (2), dont j'ai publié deux éditions, la première à l'usage des écoles classiques et des instituts techniques, l'autre à l'usage des gymnases et lycées. J'énonce au début les postulats relatifs à la droite, considérée en soi, et je définis

(1) Dans ce principe est compris celui de dualité, de la Géométrie projective.

(2) La première édition a été publiée en 1897, la deuxième en 1900, chez DRUCKER, à Padoue. J'ai eu comme collaborateur, pour la partie didactique, M. le professeur Paolo GARRANIGA, du Lycée royal Tite-Live, à Padoue.

Digitized by Google

l'égalité et l'inégalité des segments, sans recourir à la superposition. J'en déduis les propriétés d'addition et de soustraction des segments. Toutes ces propriétés sont valables, *mutatis mutandis,* pour le faisceau de rayons, pour la circonférence et pour le faisceau de plans. Je donne ensuite le postulat qui distingue la droite des autres figures, à savoir sa propriété d'être déterminée par deux points. Après l'étude des figures rectilignes, vient la définition des figures égales. J'introduis au début le concept du *couple de droites* (figure formée par deux droites), et j'énonce le postulat relatif à la réversibilité de ce couple. J'arrive alors aux parallèles, définies comme droites opposées par rapport à un point, et au postulat qui les concerne. Dans la première édition, la plus complète, je démontre que la droite est une figure *ouverte*. La seconde est destinée à des élèves d'esprit moins formé; c'est pourquoi j'y admets comme axiomatique la proposition dont il s'agit, tout en la distinguant des autres postulats, parce qu'elle n'est pas indémontrable. J'aborde ensuite la construction du plan, dont j'ai démontré dans la première édition la propriété fondamentale : il contient toute droite dont il contient deux points. Dans la seconde, cette proposition est admise sans démonstration.

En raison de la correspondance signalée plus haut entre la droite et le faisceau de rayons, l'angle se présente comme une partie du faisceau, de même que le segment est une partie de la droite. L'angle ainsi défini est à distinguer de l'*angle plan,* partie du plan limitée par deux rayons : le premier est un être linéaire, le second un être superficiel. Dans la première édition je démontre toutes les propriétés du faisceau de rayons, correspondant aux postulats de la droite, considérée en soi. Dans la seconde, j'admets pour plus de brièveté quelques-unes de ces propriétés qui sont intuitives dans le champ de notre observation.

Je termine le second Livre en traitant des constructions élémentaires qui peuvent s'effectuer avec la règle et le compas.

Dans le troisième Livre, j'établis les éléments de la Géométrie de l'espace, jusqu'à la génération du cône, du cylindre et de la sphère. Dans la première édition, j'ai ajouté un postulat à ceux qui sont indiqués plus haut : *il existe des points en dehors du plan*. Je l'applique à la construction de l'espace ordinaire (sans exclure la possibilité d'espaces supérieurs, que je laisse de côté pour ne pas trop étendre l'Ouvrage). J'ajoute un *postulat pratique* (c'est-à-dire nécessaire aux applications pratiques), d'où l'on doit conclure que l'espace physique est à trois dimensions. Dans la seconde édition, j'ai procédé autrement : au postulat : *il existe des points en dehors du plan,* j'ajoute celui-ci : *deux plans ayant*

Digitized by Google

un point commun ont une droite commune. La Géométrie se trouve ainsi réduite, d'un coup, à l'étude de l'espace ordinaire, et les premières notions de stéréométrie en sont rendues plus accessibles.

Les trois premiers livres concernent la Géométrie générale de la droite, du plan et de l'espace. Dans le livre suivant, je traite de l'équivalence des figures planes et solides. Il faut abandonner la définition euclidienne, d'après laquelle deux figures planes ou solides sont dites équivalentes quand elles ont les mêmes aires ou le même volume, sans que l'on ait préalablement défini l'aire et le volume. Je donne deux postulats relatifs, le premier aux polygones, le second aux polyèdres, postulats d'ailleurs démontrables. Pour l'équivalence, j'invoque le postulat du continu rectiligne et celui d'Archimède (*si a et b sont deux segments, et si $a < b$, il existe un nombre n tel que $an > b$*). Au moyen du postulat d'Archimède et de celui-ci : *tout segment, même variable, contient un point distinct de ses extrémités,* on peut démontrer le postulat du continu rectiligne sous la forme de Dedekind : *toute répartition de Dedekind de points sur un segment est déterminée par un seul point.*

M. Hilbert, dans son beau travail : *Sur les fondements de la Géométrie* (1) donne à l'axiome d'Archimède le nom d'*axiome de continuité*, et démontre très élégamment la possibilité d'une Géométrie qui ne vérifierait pas cet axiome. Cette géométrie diffère de la mienne en ce sens que celle-ci est plus complète et qu'on peut y définir une continuité plus générale que la continuité ordinaire.

Mon postulat du continu non seulement est différent de celui d'Archimède, mais il en est indépendant. On peut étendre le concept du point de manière à éviter d'énoncer le postulat de la continuité, tout en satisfaisant aux autres axiomes, comme on peut, par une extension d'une autre nature, construire dans l'espace à trois dimensions une variété à quatre dimensions qui satisfait aux postulats de l'hyperespace. Aussi la Géométrie se généralise comme l'Arithmétique, où l'on étend la notion de nombre en construisant successivement les nombres fractionnaires, négatifs, incommensurables, et aussi les nombres infiniment grands ou infiniment petits *actuels,* auxquels s'appliquent encore les opérations fondamentales.

Mais cette manière d'éviter le postulat de la continuité n'est pas à recommander dans l'enseignement (2). Il est préférable, au contraire, de

(1) Traduit en français par M. LAUGEL (Paris, Gauthier-Villars).

(2) *Il postulato del continuo* (*Rend. Acc. dei Lincei,* 1898). *Voir* aussi l'ap-

Digitized by Google

l'appliquer chaque fois qu'il ne s'ensuit pas de difficulté didactique.

Dans l'appendice de la première édition, destinée aux professeurs, j'ai démontré les propositions qui avaient été admises dans le texte sans démonstration.

Ma méthode a été expérimentée dans ces dernières années, et quand le professeur s'en est assez bien assimilé les principes pour les exposer et les interpréter clairement, les résultats sont, je puis le dire, des plus satisfaisants (1).

Je me permettrai d'achever cette communication par quelques remarques concernant la Critique. Pour remplir un rôle vraiment utile, la Critique doit être élevée et impartiale. Elle doit être élevée en ne s'attardant pas aux minuties, mais en jugeant les œuvres sur leur ensemble. Elle doit être impartiale, parce que la perfection ne saurait être absolue, l'auteur ayant à tenir compte de conditions surabondantes ou spéciales. Les œuvres doivent donc être jugées par comparaison avec celles du même genre, et non d'une manière absolue. Enfin, comme un même problème peut admettre diverses solutions également satisfaisantes, la Critique doit être tolérante. C'est dans ces seules conditions qu'elle pourra contribuer aux progrès de l'Enseignement. Les *Scuole di magistero,* annexées aux Facultés des Sciences, en Italie, peuvent, à ce point de vue, jouer un rôle utile, en ne se consacrant pas uniquement aux recherches de science pure, et en étudiant les questions de principes, laissées généralement de côté dans les cours universitaires. Le but primordial de ces écoles, il ne faut pas l'oublier, est en effet de préparer de bons professeurs pour les écoles secondaires.

---

pendice à la première édition des *Eléments,* édité séparément chez Drucker, à Padoue (1898).

(1) En octobre 1901 a été publiée la troisième édition, ainsi que la première édition des *Nozioni elementari di Geomet. intuitiva,* qui servent, dans les gymnases inférieurs (trois années), de préparation à l'étude de la Géométrie rationnelle, celle-ci étant enseignée, en Italie, dans les gymnases supérieurs (deux années) et dans les lycées (trois années).

FIN.

Digitized by Google

MODIFICATIONS

A LA

LISTE DES MEMBRES DU CONGRÈS.

MM.

Baire, Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
Drach, Maître de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard des Écoles, 31, à Lille (Nord).
Emelen (van), boulevard du Château, 491, à Gand (Belgique).
Fouret, avenue Carnot, 4, à Paris.
Gutzmer, Schœfferstrasse, 4, à Iéna.
Henry, décédé.
Hoffbauer, rue du Faubourg-du-Temple, 54, à Paris.
Jolles, Kurfürstendamm, 130, à Halense, bei Berlin.
Lancelin, rue Boissonnade, 3, à Paris.
Leau, rue Vavin, 6, à Paris.
Lemoine, boulevard de Vaugirard, 4, à Paris.
Lindelöf, Nylandsgatan, 15, à Helsingfors.
Padé, Professeur à la Faculté des Sciences, route de Bordeaux, 26, à Poitiers.
Padoa, via Labicana, 32, à Rome.
Painlevé, cité Vaneau, 9, à Paris.
Picquet, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris.
Ripert, à Poix (Somme).
Séguier (de), rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
Zaremba, Professeur à l'Université de Cracovie (Autriche-Hongrie).
Zeuthen, Saint-Kanntkestrœde, 11, à Copenhague, K.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

DOCUMENTS ET PROCÈS-VERBAUX.

Pages.

Bureau du Congrès 1
Bureaux des Sections 2
Délégués officiels 2
Liste générale des Membres du Congrès 3
Emploi du temps 11
Compte rendu résumé du Congrès 12
Procès-verbaux 14

SECONDE PARTIE.

CONFÉRENCES ET COMMUNICATIONS.

CONFÉRENCES.

Sur l'historiographie des Mathématiques, par MAURICE CANTOR (Heidelberg) 27
BETTI, BRIOSCHI, CASORATI, trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse, par VITO VOLTERRA (Rome) 43
Sur les problèmes futurs des Mathématiques, par DAVID HILBERT (Göttingen) (traduction par L. LAUGEL) 58
Du rôle de l'intuition et de la logique en Mathématiques, par HENRI POINCARÉ (Paris). 115
Une page de la vie de Weierstrass, par G. MITTAG-LEFFLER (Stockholm) 131

COMMUNICATIONS.

SECTION I. — Arithmétique et Algèbre.

Sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire quaternaire régulier, par LEON AUTONNE (Lyon) 155
Remarks on Kronecker's modular systems, by HARRIS HANCOCK (Cincinnati) 161
Sur la distribution des nombres premiers, par HELGE VON KOCH (Stockholm). 195
Sur le covariant résolvant de la forme binaire du cinquième ordre, par RAOUL PERRIN (Paris) 199
The known systems of simple groups and their inter-isomorphisms, by L.-E. DICKSON (Chicago) 225

Digitized by Google

Pages.

A method of computing the common logarithm of a number without making use of any-logarithm but that of some power of 10, by ARTEMAS MARTIN (Washington). 231
A rigorous method of finding biquadrate numbers whose sum is a biquadrate, by ARTEMAS MARTIN 239
Un nouveau système irréductible de postulats pour l'Algèbre, par ALESSANDRO PADOA (Rome) 249
Aperçu sur les développements récents de la théorie des fractions continues, par H. PADÉ (Poitiers) 257

SECTION II. — Analyse.

Sur l'évanouissement des fonctions Θ de plusieurs variables, par TIKHOMANDRITZKY (Kharkoff) 265
Sur une extension de la série de Taylor, par MITTAG-LEFFLER (Stockholm) 273
Remarques relatives à la Communication de M. Mittag-Leffler, par E. BOREL (Paris). 277
Nouveaux systèmes orthogonaux pour les dérivées des fonctions Θ de deux arguments, par E. JAHNKE (Berlin) 279
Sur les intégrales complètes des équations aux dérivées partielles du second ordre, par JULES DRACH (Clermont-Ferrand) 281

SECTION III. — Géométrie.

Sur les transformations de contact entre les lignes droites et les sphères, par E.-O. LOVETT, à Princeton (New-Jersey) 291
Sur les corps réguliers et semi-réguliers, par F.-J. VAES, à Rotterdam 299
Application of space-analysis to curvilinear coordinates, by Prof. ALEXANDER MACFARLANE, Lehigh University, South Bethlehem (Pensylvania) 305
Coup d'œil sur les courbes algébriques au point de vue de la gonalité, par FEDERICO AMODEO (Naples) 313
Orthogonal transformations in elliptic, or in hyperbolic space, by IRVING STRINGHAM, Ph. D., Professor in the University of California 327
Sur le théorème de M. Salmon, concernant les cubiques planes, par V. JAMET, Professeur au Lycée de Marseille 339
Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne, par A. PADOA (Rome) 353

SECTION IV. — Mécanique.

Remarques sur le calcul des perturbations spéciales des petites planètes, par JEAN BOCCARDI, à Catania 365
Sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles, par J. HADAMARD (Paris) 373
Sur les équations aux dérivées partielles, par V. VOLTERRA (Rome) 377

SECTION V. — Bibliographie et Histoire.

Note on the Mathematics of the old Japanese School, by R. FUJISAWA (Tokio) 379
Les Mathématiques et la Biologie, par ANGEL GALLARDO (Buenos-Ayres) 395

Digitized by Google

SECTION VI. — Enseignement et Méthodes.

Pages.

Note sur la critique mathématique, par ZOËL G. DE GALDEANO (Saragosse)..... 405

Le iper-aritmetiche e l'indirizzo combinatorio dell'aritmetica ordinaria, par ALFREDO CAPELLI (Naples).... 407

Sur les divers modes d'application de la méthode graphique à l'art du calcul. Calcul graphique et calcul nomographique, par MAURICE D'OCAGNE (Paris)..... 419

Sur l'utilité de la publication de certains renseignements bibliographiques en mathématiques, par ED. MAILLET (Paris)..... 425

Sur la langue internationale auxiliaire de M. le Dr Zamenhof, connue sous le nom d'*Esperanto*, par CH. MÉRAY (Dijon). (Communication présentée par M. *C.-A. Laisant*.)..... 429

Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement, par G. VERONESE (Padoue) (Traduction de R. Bricard et E. Duporcq)..... 433

Modifications à la liste des Membres du Congrès..... 451

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Digitized by Google

29106 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

Compte Rendu du Deuxieme Congres
International Des Mathematiciens

ISSUED TO

DATE

Cat. No. 1132

Digitized by Google

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Traité de Mécanique rationnelle.** (Cours de Mécanique de la Faculté des Sciences.) 3 volumes grand in-8 se vendant séparément.

TOME I. — *Statique. Dynamique du point.* 2e édition entièrement refondue, avec 178 figures; 1902..... 18 fr.

TOME II. — *Dynamique des systèmes. Mécanique analytique,* avec 99 figures; 1896..... 16 fr.

TOME III. — *Équilibre et mouvement des milieux continus.* Deux fascicules (480 pages) sont parus. Prix du volume complet pour les souscripteurs..... 15 fr.

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur la Théorie des fonctions.** *Exposé de la théorie des ensembles.* Grand in-8; 1898..... 3 fr. 50 c.

BOREL (Émile). — **Nouvelles Leçons sur la Théorie des fonctions.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières; 1900..... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries divergentes; 1901..... 4 fr. 50 c.

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France; 1902..... 3 fr. 50 c.

BIGOURDAN (G.), Astronome titulaire de l'Observatoire de Paris. — **Le Système métrique des Poids et Mesures.** *Son établissement, sa propagation graduelle. Histoire des opérations qui ont servi à déterminer le mètre et le kilogramme.* Un volume petit in-8, en caractères elzévirs, titre en deux couleurs, avec 17 figures et 10 planches ou portraits; 1901..... 10 fr.

DUPORCQ (Ernest), ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des Télégraphes. — **Premiers principes de Géométrie moderne,** *à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats à la Licence et à l'Agrégation.* In-8, avec figures; 1899..... 3 fr.

OCAGNE (Maurice d'), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Traité de Nomographie.** *Théorie des abaques. Applications pratiques.* Grand in-8, avec 177 figures et une planche; 1899.
Broché..... 14 fr. | Relié (cuir souple).... 17 fr.

WOLF (C.), Membre de l'Institut. — **Histoire de l'Observatoire de Paris, de sa fondation à 1793.** Grand in-8 de XII-392 pages, avec 16 planches; 1902..... 15 fr.

ZEUTHEN (H.-G.), Professeur à l'Université de Copenhague. — **Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge.** — Édition française revue et corrigée par l'auteur, traduite par JEAN MASCART, Docteur ès sciences. In-8 de XV-296 pages, avec 31 figures; 1902..... 9 fr.

29106 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google